

VANUSA GOMES DA SILVA

COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA MODELAGEM E PREVISÃO DE SÉRIE
COM TENDÊNDIA E SAZONALIDADE

São Paulo
2019

VANUSA GOMES DA SILVA

**COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA MODELAGEM E PREVISÃO DE SÉRIE
COM TENDÊNDIA E SAZONALIDADE**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Especialista
em Engenharia Financeira.

Área de concentração:
Engenharia Financeira

Orientador: Prof. Dr. Bruno Angélico

São Paulo
2019

VANUSA GOMES DA SILVA

**COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA MODELAGEM E PREVISÃO DE SÉRIE
COM TENDÊNDIA E SAZONALIDADE**

Monografia apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Especialista
em Engenharia Financeira.

São Paulo
2019

Dedico este trabalho ao meu esposo Douglas Ernesto Fazioni Souza que esteve ao meu lado e me deu suporte no nosso dia-a-dia durante vários momentos do curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o qual tem me permitido viver em total plenitude das minhas faculdades físicas motoras e mentais. Agradeço imensamente ao meu orientador e excelente professor, Bruno Angélico, pelo seu apoio e dedicação na orientação para a conclusão desse trabalho. A todos os aprovadores (*in memorian*) das leis estaduais nº26 e nº64, em 1893, pelas quais foi criada a Escola Politécnica do Estado de São Paulo, e aos aprovadores do regulamento publicado no diário oficial do estado de São Paulo, na forma da lei nº191, pela qual criava-se os primeiros cursos de engenharia da escola, assinada no governo de Bernardino de Campos ao qual também dedico este agradecimento. Dedico também a todo corpo administrativo e docente que vem mantendo essa universidade viva, o que me possibilitou fazer parte de mais uma turma formada no curso de Engenharia Financeira. Agradeço às minhas amigas do curso, Marcelle Toutain, Franciele Schlemm, pela companhia, pelas caronas durante o curso, pelo trabalho em equipe e pelos momentos de lazer que fizeram com que o curso fosse mais leve.

Se queres prever o futuro, estuda o
passado.
(Confúcio)

RESUMO

A análise de séries temporais está longe de ser um assunto novo, os modelos aqui estudados são da década de 1970, no entanto, devido às evoluções tecnológicas e ao aumento da capacidade de armazenamento de dados, necessitamos cada vez mais de tecnologias que ajudem a tratar tais informações a ponto de extrair ao máximo os fatos relevantes sobre o montante de dados armazenados transformando-os em valiosas contribuições para auxílio na tomada de decisão gerencial e até mesmo na previsão de dados, que é o assunto envolvido neste trabalho. Serão apresentados alguns dados conceituais sobre séries temporais e suas propriedades e em seguida são apresentados os modelos que foram usados na previsão dos dados a partir das séries estudadas. É efetuada a comparação de dois modelos que são indicados para o tratamento de dados com a presença de sazonalidade, são eles: *Holt-Winters* e SARIMA. A partir desse estudo concluímos que cada série tem sua particularidade o que faz com que o modelo adequado seja único para cada série estudada. De modo geral, das quatro séries estudadas o modelo no qual tivemos o melhor resultado foi o *Holt-Winters Multiplicativo*.

Palavras-Chave: Séries temporais, Holt-Winters, SARIMA, Modelagem.

ABSTRACT

The time series analysis is far from being a new subject, the models studied here are from the 1970s, however, due to technological developments and increasing data storage capacity, we need more and more technologies that help to treat such information as to make the most of the relevant facts about the amount of data stored making them valuable contributions to aid in managerial decision making and even in data forecasting, which is the subject matter involved in that work. In it, some conceptual data about time series and their properties are presented and then the models that were used to predict the data from the series studied are presented. The comparison of two models that are indicated for the treatment of data with the presence of seasonality, are: Holt-Winters and SARIMA. From this study we conclude that each series has its particularity which makes the appropriate model unique for each series studied. In general, of the four series studied the model in which we had the best result in most of them was the Multiplicative Holt-Winters.

Keywords: Time Series, *Holt-Winters*, SARIMA, Modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Passagens Aéreas	Figura 2 – Lince Capturados	26
Figura 3 - Série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	31	
Figura 4 - Série com ACF e PACF: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	31	
Figura 5 - Análise sazonal da série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	32	
Figura 6 - Decomposição da série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	33	
Figura 7 - Série subtraída da componente sazonal: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	33	
Figura 8 - Série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	34	
Figura 9 - Série com ACF e PACF: Livros Jornais Revistas e Papelaria	35	
Figura 10 - Análise sazonal da série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	36	
Figura 11 - Decomposição da série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	37	
Figura 12 - Série subtraída da componente sazonal: Livros Jornais Revistas e Papelaria	37	
Figura 13 - Série: Tecidos Vestuários e Calçados	38	
Figura 14 - Série com ACF e PACF: Tecidos Vestuários e Calçados	39	
Figura 15 - Análise sazonal da série: Tecidos Vestuários e Calçados	40	
Figura 16 - Decomposição da série: Tecidos Vestuários e Calçados	41	
Figura 17 - Série subtraída da componente sazonal: Tecidos Vestuários e Calçados	41	
Figura 18 - Série: Produção Física da Indústria de Transformação	42	
Figura 19 - Série com ACF e PACF: Produção Física da Indústria de Transformação	43	
Figura 20 - Análise sazonal da série: Produção Física da Indústria de Transformação	44	
Figura 21 - Decomposição da série: Produção Física da Indústria de Transformação	45	
Figura 22 - Série subtraída da componente sazonal: Produção Física da Indústria de Transformação	45	
Figura 23 - Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	48	
Figura 24 - Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	48	
Figura 25 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	49	
Figura 26 - Resíduos do Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	49	
Figura 27 - Modelo SARIMA na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	50	
Figura 28 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo	50	

Figura 29 - Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	51
Figura 30 - Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	52
Figura 31 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	52
Figura 32 - Resíduos do Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	53
Figura 33 - Modelo SARIMA na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	54
Figura 34 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria	54
Figura 35 - Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Tecidos Vestuários e Calçados	55
Figura 36 - Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Tecidos Vestuários e Calçados	56
Figura 37 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Tecidos Vestuários e Calçados	56
Figura 38 - Resíduos do Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Tecidos Vestuários e Calçados	57
Figura 39 - Modelo SARIMA na série: Tecidos Vestuários e Calçados	58
Figura 40 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Tecidos Vestuários e Calçados	58
Figura 41 - Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Produção Física da Indústria de Transformação.....	59
Figura 42 - Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Produção Física da Indústria de Transformação	60
Figura 43 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de <i>Holt-Winters</i> na série: Produção Física da Indústria de Transformação	60
Figura 44 - Resíduos do Modelo Aditivo de <i>Holt-Winters</i> na série: Produção Física da Indústria de Transformação.....	61
Figura 45 - Modelo SARIMA na série: Produção Física da Indústria de Transformação	61
Figura 46 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Produção Física da Indústria de Transformação	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Exemplos de Séries	20
Tabela 2 - Comparação das Funções de Autocorrelação FAC e FACP.....	23
Tabela 3 – Consolidado das Métricas de Erro do Modelo um Passo à Frente.....	63
Tabela 4 - Consolidado das Métricas de Erro da Previsão Vinte Passos à Frente ...	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIC – Critério de Informação de *Akaike*

AICC – Critério de Informação de *Akaike* Corrigido

AR – Auto Regressivo

BIC – Critério de Informação Bayesiano

EMQ - Erro médio quadrático

FAC - Função de Auto Correlação

FACP - Função de Autocorrelação Parcial

HW - Modelo de Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IPC - Índice de Preços ao Consumidor

MA – Médias Móveis

PIB - Produto Interno Bruto

SEH - Modelo de Suavização de Holt

SES - Modelo de Suavização Simples

ST – Série Temporal

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	14
2.	METODOLOGIA	15
2.1.	Base de dados	15
2.2.	Série Temporal	16
2.2.1.	Série Estacionária	17
2.2.2.	Série não Estacionária.....	18
2.3.	Ergodicidade	20
2.4.	Sazonalidade.....	20
2.5.	Autocorrelação	21
2.6.	Função de Autocorrelação – FAC.....	21
2.7.	Função de Autocorrelação Parcial - FACP.....	22
2.8.	Identificação	22
2.9.	Modelos de Suavização Exponencial.....	23
2.9.1.	Modelo de Suavização Simples (SES)	23
2.9.2.	Modelo de Suavização de Holt (SEH).....	24
2.9.3.	Modelo de Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters (HW)	25
2.10.	Modelo SARIMA	27
3.	ANÁLISE EXPLORATÓRIA.....	30
3.1.	Hipermercados, Supermercados, Produtos Alimentícios Bebidas e Fumo	30
3.1.1.	Análise da Sazonalidade	32
3.2.	Livros, Jornais, Revistas e Papelaria	34
3.2.1.	Análise da Sazonalidade	36
3.3.	Tecidos Vestuários e Calçados.....	38
3.3.1.	Análise da Sazonalidade	39
3.4.	Produção Física da Indústria de Transformação.....	42
3.4.1.	Análise da Sazonalidade	43
4.	MODELAGEM.....	47
4.1.	Hipermercados Supermercados Produtos Alimentícios Bebidas e Fumo.....	47
4.1.1.	Modelagem pelo Método de Holt-Winters	47
4.1.2.	Modelagem pelo Método SARIMA.....	49
4.2.	Livros Jornais Revistas e Papelaria	51
4.2.1.	Modelagem pelo Método de Holt-Winters	51
4.2.2.	Modelagem pelo método SARIMA.....	53
4.3.	Tecidos Vestuários e Calçados.....	55

4.3.1.	Modelagem pelo Método de Holt-Winters	55
4.3.2.	Modelagem pelo Método SARIMA.....	57
4.4.	Produção Física das Indústrias de Transformação.....	59
4.4.1.	Modelagem pelo Método de Holt-Winters	59
4.4.2.	Modelagem pelo Método SARIMA.....	61
5.	COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	63
6.	CONCLUSÃO	67
7.	BIBLIOGRAFIA.....	68

1. INTRODUÇÃO

Devido aos avanços tecnológicos, a capacidade de armazenamento de dados cresceu exponencialmente nos últimos anos, e com isso, a análise de grandes volumes de informações tem se tornado cada vez mais requerida por todas as instituições e empresas que desejam extrair desse montante de dados os fatos relevantes e cruciais que servirão de apoio na tomada de decisão sobre os seus produtos e/ou clientes. Isso se também se aplica às séries de preços de ações, ou índices econômicos.

Nesta monografia será tratado o tema séries temporais utilizando o software R, pois além de ser robusto, flexível e livre, trabalha muito bem com grandes bases de dados e oferece excelentes pacotes de séries temporais. Será feito o estudo de quatro séries de dados extraídas do site do IBGE na qual estão presentes as componentes necessárias para a aplicação dos modelos a serem trabalhados. São eles: SARIMA e *Holt-Winters*, ambos indicados para o tratamento de séries que contém sazonalidade.

No segundo capítulo desta monografia teremos uma introdução de alguns conceitos sobre séries temporais, suas características mais importantes para a modelagem de dados e as funções principais de análise. Serão abordados alguns modelos de suavização incluindo o modelo SARIMA e o de *Holt-Winters*.

No terceiro capítulo serão apresentadas as análises exploratórias das séries a serem modeladas onde será possível identificar as componentes mais expressivas da série como a sazonalidade e sua periodicidade, assim como ciclo e tendência.

No quarto capítulo será feita a modelagem e a análise dos modelos SARIMA e *Holt-Winters*, aplicados às séries baseadas em análise gráfica das previsões, dos resíduos e nas métricas dos erros um passo à frente e vinte passos à frente.

No quinto capítulo será feita a comparação de resultados obtidos nas métricas de cada modelo e no capítulo sexto será feita a conclusão. No último capítulo serão listadas as referências bibliográficas utilizadas no embasamento e fundamentação teórica da monografia e no auxílio da criação dos códigos utilizados na análise de dados no software R.

2. METODOLOGIA

Esse capítulo tem por objetivo apresentar as séries temporais que serão tratadas na monografia. Serão apresentadas algumas de suas características, sua fonte de dados e o motivo pelo qual foram escolhidas. Serão apresentados alguns conceitos sobre séries temporais, estacionariedade da série, as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, que serão ferramentas de análise das séries no momento da modelagem, e será mostrado como se obtém uma sugestão de modelo a ser aplicado baseando-se nessas funções. Serão abordados alguns conceitos sobre suavização exponencial, incluindo o de *Holt-Winters* aditivo e multiplicativo e o capítulo será encerrado com a abordagem sobre o modelo SARIMA que também será aplicado às séries na modelagem abordada no capítulo 4.

2.1. Base de dados

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, que contém um acervo de informações sobre a realidade brasileira em suas dimensões social (educação, habitação, trabalho, saúde, organização familiar), demográfica (características da população, dinâmica demográfica e indicadores demográficos) e econômica (sistema de contas nacionais; índices de preços, de produção e de comércio; agropecuária).

Foram selecionadas quatro séries de dimensão econômica, que contemplam o volume de vendas no varejo representadas pelo índice de base fixa (2011=100), nas seguintes categorias:

1. Hipermercados, supermercados, produtos alimentícios, bebidas e fumo
2. Livros, jornais, revistas e papelaria
3. Tecidos, vestuário e calcados

E contemplam também a atividade industrial das indústrias extrativa e de transformação representada pelo índice de base fixa mensal da produção industrial

de abrangência Brasil e Estados selecionados (Base: média de 2002 = 100) na seguinte categoria:

4. Indústria de transformação

Essas séries foram escolhidas por apresentarem as componentes que precisamos para a aplicação dos modelos SARIMA e *Holt-Winters*, são elas: Sazonalidade, ciclo e tendência.

2.2. Série Temporal

Uma série temporal é um conjunto de dados numéricos obtidos durante períodos regulares ao longo do tempo. Por exemplo, o preço diário de fechamento de determinada ação na Bolsa de Nova York, ou as informações trimestrais sobre o Produto Interno Bruto (PIB) e as publicações mensais do índice de Preços ao Consumidor (IPC), bem como o registro de vendas anuais de determinada empresa. As séries temporais podem ser formadas pelas componentes tendência, sazonalidade, ciclo e termo aleatório (NASCIMENTO et. al. 1996; LEVINE et. al. 2000).

Pela análise de séries temporais visamos à formulação de modelos capazes de predizer valores futuros baseados nos dados passados. A análise da série de dados no tempo permite a sua decomposição em tendência, sazonalidade, ciclo, e mais um termo aleatório, (NASCIMENTO et. al. 1996; LEVINE et. al. 2000).

A sazonalidade pode ser definida como oscilações crescentes ou decrescentes que sempre ocorrem em um determinado período do dia, da semana, do mês ou do ano. Os ciclos são flutuações econômicas de ordem geral, de periodicidade variável, devidas a uma multiplicidade de causas ainda em debate e o termo aleatório são variáveis devidas a causas não identificadas que ocorrem em um curto ou curtíssimo prazo ao acaso não sendo possível prevê-las.

Uma série temporal pode ser representada pela combinação das componentes de tendência, sazonalidade e ciclo numa estrutura aditiva e multiplicativa. Por exemplo, para a estrutura aditiva, suponha que uma dada série possa ser representada da seguinte forma:

$$Z_t = T_t + S_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Onde Z_t é o dado observado no período t , S_t é a componente sazonal no período t , T_t a componente de ciclo-tendência no período t e ε_t representa a parte não capturada do modelo no período t , chamada de erro (ou resíduo).

A série Z_t no modelo multiplicativo pode ser representada da seguinte forma:

$$Z_t = T_t * S_t * \varepsilon_t \quad (2)$$

A escolha da aplicação de uma estrutura ou da outra vai depender do comportamento da série. Para uma série em que a variabilidade das componentes é constante é indicado o modelo aditivo, já para uma série onde a variância das componentes cresce ou decresce com o nível implícito da série o modelo multiplicativo é o mais indicado.

As séries temporais podem ser estacionárias ou não estacionárias, estocásticas ou determinísticas.

2.2.1. Série Estacionária

Uma série estacionária no sentido amplo (doravante denominada série estacionária) é aquela em que tanto a média quanto a variância não dependem do índice temporal. Em (MORETTIN e TOLOI, 2006, p.108), um exemplo de processo estacionário são as vibrações de um avião em regime estável de voo horizontal, durante o seu cruzeiro onde as vibrações seguem com uma variação constante devido ausência de impulsos como a aceleração ou frenagem de modo a seguir com oscilações constantes e contínuas no tempo. Deste modo as estatísticas de primeira e segunda ordem $Z(T + \tau)$ para todo τ são as mesmas de $Z(t)$.

Uma série estacionária para a média é aquela que flutua em torno de uma mesma média, Bueno, (2012). O conceito é afirmado também por Helmut Lütkepohl.

Processos são considerados estacionários quando tem variância e covariância constantes no tempo. Em outras palavras, o primeiro e o segundo

momento da variável aleatória não mudam com o tempo. (LÜTKEPOHL, 2006, p. 6, tradução nossa)

2.2.1.1. Série Estacionária Determinística

A série estacionária determinística mais simples, segundo Bueno (2012), é uma constante, $C \in \mathbb{R}$ ou seja:

$$y_t = c \quad (3)$$

Um outro exemplo de série estocástica determinística é:

$$y_t = c + 0,5y_{(t-1)} \quad (4)$$

dado y_0 , essa série converge para $\mu = 2c$, à medida que t aumenta.

2.2.1.2. Série Estacionária Estocástica

A Série estacionária estocástica tem um componente aleatório independente e identicamente, que pode, por exemplo, ser extraído de uma distribuição normal, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, (BUENO, 2012).

$$y_t = c + \varepsilon_t \quad (5)$$

2.2.2. Série não Estacionária

A série não estacionária tem uma tendência na qual a sua média flutua no decorrer do tempo. Ao contrário da série estacionária onde usamos o exemplo do avião em situação de voo constante, para a série não estacionária podemos usar o exemplo do avião no momento da decolagem onde a aceleração é um impulso que causa na série uma variação que não será constante, tendendo a ser mais intensa no

início do percurso até a estabilização na altura apropriada para o voo. Uma vez atingida a altura necessária a aceleração é diminuída podendo ainda ter oscilações.

2.2.2.1. Série não Estacionária Determinística

A seguinte série é não estacionária com tendência determinística, acrescida de um componente aleatório extraído de uma distribuição normal e ela se move em torno de médias flutuantes, (BUENO, 2012).

$$y_t = c + \delta t + \varepsilon_t \quad (6)$$

Pode-se observar que o δt é um termo de *drift*, (ENDERS, 2008, p.159), define “uma constante somada t vezes”, que se traduz em uma tendência determinística. (BUENO, 2012, p.112) afirma “Ao adicionar o um *drift* ao modelo, encontra-se um passeio aleatório com *drift*”.

2.2.2.2. Série não Estacionária Estocástica

Um processo estocástico é estacionário se a sua média e autocovariância são constantes no tempo, a qual poderá ser confirmada pela FAC – Função de Auto Correlação a ser vista mais à frente. Um processo não estacionário apresenta decaimento lento de sua função de autocorrelação, (BARROS, et. al., 2018).

A série não estacionária com tendência estocástica move-se em torno de médias flutuantes, Bueno (2012). Um exemplo de série não estacionária estocástica é o passeio aleatório (do inglês, *Random Walk*), dado por:

$$y_t = y_{(t-1)} + \varepsilon_t \quad (7)$$

Então, séries não estacionárias não têm média e/ou variância constantes ao longo do tempo, contrariamente às séries estacionárias. Logo, não há dados suficientes para estimar a média e a variância de uma série não estacionária. Veremos nos tópicos seguintes que para o tratamento da série e aplicação dos modelos será

necessário o tratamento da série não estacionária a fim de torna-la estacionária para que seja possível analisar suas componentes.

Em resumo, tem-se alguns exemplos de séries apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Exemplos de Séries

Tipo de Série		Estocástica	Determinística
Estacionária		$y_t = c + \varepsilon_t$	$y_t = c + 0,5y_{(t-1)}$
Não estacionária	Tendência Estacionária	$y_t = c + \delta t + \varepsilon_t$	$y_t = c + \delta t$
	Tendência Estocástica	$y_t = y_{(t-1)} + \varepsilon_t$	

Fonte: Adaptação de Rodrigo de Losso da Silveira Bueno (2012)

2.3. Ergodicidade

Segundo Bueno (2012), não é possível estimar uma série temporal apenas com a propriedade de estacionariedade. Essencialmente para a modelagem de séries temporais e sua estimação é necessário satisfazer a propriedade de ergodicidade. Essa propriedade permite usar uma série temporal para calcular as médias em cada instante de tempo. Como as médias são todas iguais, basta uma única realização da série para viabilizar o cálculo.

2.4. Sazonalidade

A Sazonalidade pode estar presente nas séries econômicas por diversos fatores como em decorrência de safras agrícolas, férias, clima e datas especiais como o natal e réveillon. Ela pode ter estrutura multiplicativa ou aditiva, isso vai depender da variação da sazonalidade, caso a variação seja constante podemos classificá-la como aditiva, do contrário, multiplicativa.

Na modelagem das séries com sazonalidade há casos em que é mais apropriado estimar o modelo dessazonalizando cada uma das variáveis utilizadas, em outros casos estima-se o modelo corrigindo simultaneamente a sazonalidade. Em geral, Bueno (2012), dessazonalizam-se as variáveis quando se têm variáveis sazonais e não sazonais.

É preciso muito cuidado para não dessazonalizar séries sem sazonalidade, pois pode distorcer artificialmente a série. Por exemplo: taxas de juros não devem ser dessazonalizadas e caso esteja relacionada à inflação, esta deve estar depurada de fatores sazonais.

2.5. Autocorrelação

A função de autocorrelação descreve a correlação entre duas observações adjacentes da mesma série temporal, ocorridas em diferentes períodos, enquanto a função de autocorrelação parcial mede o grau de associação entre as observações de uma série temporal quando o efeito de defasagem é retirado. Essas duas funções são ferramentas essenciais para a identificação do modelo a ser aplicado. Pela análise delas pode-se estimar a ordem do modelo nas partes autoregressivas e de suavização exponencial mais o número de diferenciação que deve ser aplicado à série quando usamos o modelo ARIMA, como será visto nos próximos tópicos da monografia.

2.6. Função de Autocorrelação – FAC

Através da função de autocorrelação é possível identificar a ordem q de um processo MA e em seu Figura temos o resultado da autocorrelação contra a defasagem. Para o processo MA a autocorrelação torna-se zero a partir da defasagem q enquanto que para outros modelos ela decai. No caso do processo $AR(1)$, o decaimento é exponencial, já para o um modelo $ARMA(p, q)$ pode-se ter diversas configurações. O modelo $MA(2)$, por sua vez, tem uma configuração senoidal a partir da defasagem q . Com essas características das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial é possível uma aproximação da definição da ordem p e q de um modelo univariado.

Esses padrões, por serem estocásticos, ajudam a termos uma aproximação do que seriam os valores de p e q , e por isso, nem sempre teremos os mesmos padrões aqui descritos. Uma série temporal pode sugerir outros padrões alternativos de modelagem dependendo da dificuldade de se inferir o padrão gerador da função. Mas o mais importante é extrair o máximo de informações da série, a ponto de gerar um

resíduo que seja estatisticamente um ruído branco. Deste modo estar-se-á mais próximo da modelagem que trará melhores previsões estatísticas.

2.7. Função de Autocorrelação Parcial - FACP

Por meio do decaimento exponencial pode-se ver que em um modelo $AR(1)$, existe uma correlação implícita, FAC, entre y_t e y_{t-2} . Entretanto, é possível filtrar as correlações e manter-se apenas a correlação pura entre duas observações, isso implica em gerar a função de autocorrelação parcial, FACP, pela qual eliminam-se as correlações implícitas entre duas observações, desaparecendo, assim, a autocorrelação parcial entre y_t e y_{t-2} , Bueno (2012).

O Procedimento consiste em regredir y_t contra y_{t-1} e obter $\widehat{\phi}_{j,j}$ e em seguida regredir y_t , contra y_{t-1} e y_{t-2} e obter $\widehat{\phi}_{2,1}$ e $\widehat{\phi}_{2,2}$ sendo interessante para nós apenas este último e assim por diante, formalmente temos:

$$y_t = \phi_{j,1} y_{t-1} + \phi_{j,2} y_{t-2} + \dots + \phi_{j,j} y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

em que ε_t é um erro.

Deste modo, se a análise for em um modelo $AR(2)$ os coeficientes obtidos a partir de $j > 2$ deverão ser iguais a zero. Genericamente, em um modelo $AR(p)$, encontraremos coeficientes diferentes de zero até $\phi_{p,p}$ e estatisticamente iguais a zero a partir de então.

2.8. Identificação

Deste modo os modelos $AR(p)$ e $MA(q)$ podem ser mais facilmente identificados, já para identificar o modelo $ARMA(p, q)$ o esforço será maior. A FAC define a defasagem do MA de modo que a função de autocorrelação decai com o aumento da defasagem p . Na FACP, ao contrário do anterior, a função de autocorrelação é truncada na defasagem q e a função de autocorrelação parcial decai e define, assim, a defasagem do AR, Bueno (2012).

Para o modelo $ARMA(p, q)$, as duas funções decaem a partir da defasagem de truncagem, o que torna mais difícil de reconhecer visualmente essa defasagem. A FAC começará a decair a partir da defasagem q e a FACP a partir da defasagem q . Pode-se ver um resumo na Tabela 2:

Tabela 2 - Comparação das Funções de Autocorrelação FAC e FACP.

Modelo	FAC	FACP
$AR(p)$	Decai	Trunca na defasagem p
$MA(q)$	Trunca na defasagem q	Decai
$ARMA(p, q)$	Decai se iteração $> q$	Decai se iteração $> p$

Fonte: Adaptação de Rodrigo de Losso da Silveira Bueno (2012)

Na prática, Enders (2009) sugere calcular a função de autocorrelação parcial até $j = \frac{T}{4}$, em que T é o tamanho da amostra.

2.9. Modelos de Suavização Exponencial

2.9.1. Modelo de Suavização Simples (SES)

O método de suavização exponencial simples (SES) é indicado para tratar séries sem tendência e sazonalidade. O que é raro de encontrar principalmente quando se trata de séries econômicas como um índice de inflação ou preços de ações. Praticamente não existe uma série de preços sem picos de baixas ou altas ou ainda sem tendência. Geralmente para um período longo de apuração de preços pode-se identificar nessas séries uma tendência crescente ou decrescente, dependendo do estado da empresa ou ainda das especulações de mercado. No entanto, pode-se remover tais componentes da série após a sua identificação obtendo uma série estacionária e em seguida fazer a aplicação do método. Sua formulação é a seguinte:

$$\bar{Z}_t = \alpha Z_t + \alpha(1 - \alpha)Z_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2Z_{t-2} + \dots, \text{ onde: } \bar{Z}_0 = Z_1, t = 1, \dots, N, \quad (9)$$

Onde α representando o parâmetro suavização compreende valores entre 0 e 1 e quanto menor for o seu valor maior será o peso dado as observações passadas da série trazendo mais amortecimento à série. Desse modo, ter-se-á previsões mais estáveis do que com o valor de α grande variando próximo de 1, (BARROS, et. al., 2018). O ajuste desses parâmetros na modelagem possibilita obter modelos mais precisos e com o menor erro quadrático médio de previsão.

2.9.2. Modelo de Suavização de Holt (SEH)

No modelo anterior (SES) contatamos que não era possível o tratamento de séries com tendência linear e componente sazonal. Para contornar tal problema, o modelo de suavização exponencial de *Holt* (SEH), estendido por *Holt* em 1957 permite o tratamento de séries com característica de tendência linear. Este modelo é similar ao modelo SES, mas com a inclusão de um parâmetro de suavização que fará o tratamento da tendência da série. Seus valores são estimados por:

$$L_t = \alpha Z_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1; t = 2, \dots, N \quad (10)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) T_{t-1} \quad 0 \leq \beta \leq 1; t = 2, \dots, N \quad (11)$$

Onde L_t estima o nível da série no tempo t , T_t estima a tendência no tempo t e ALPHA e BETHA são, respectivamente, os parâmetros de suavização para o nível e tendência compreendendo valores entre 0 e 1.

A previsão de $T + h$ é dada por:

$$\hat{Z}_h = L_t + h\hat{T}_t + \forall h > 0 \quad (12)$$

A previsão é feita ao adicionar o valor encontrado na equação do nível L_t ao valor estimado para a tendência multiplicado pelo número de passos à frente que se deseja obter, (BARROS, et. al., 2018).

2.9.3. Modelo de Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters (HW)

Segundo MAKRIDAKIS, WEELWRIGHT e HYNDMAN (1998), o método de *Holt-Winters* é uma evolução do modelo de suavização exponencial simples que, inicialmente, *Holt* (1957) usava para trabalhar com dados que apresentavam tendência linear. Visto sua necessidade de trabalhar com dados que apresentavam característica de tendência, foi incluída uma equação para adaptar o modelo e assim trata-las. *Winters* (1960) estendeu o modelo incluindo uma equação que acrescentasse às previsões o comportamento sazonal dos dados, o que resultou no modelo de *Holt-Winters*, (BARROS, et. al., 2018).

O modelo é uma técnica determinística de previsão e é considerado o mais indicado para o tratamento de séries temporais em que se encontra a presença de tendência, a qual também pode ser tratada por outros métodos mais simples, no entanto, quando falamos de séries temporais com a presença de sazonalidade, esses já não são os mais indicados prevalecendo, assim, o método de *Holt-Winters*, pois descreve apropriadamente os dados em que verifica-se a ocorrência de tendência linear e de uma componente de sazonalidade (PELLEGRINI & FLOGIATTO, 2000), (BARROS, et. al., 2018).

O método de *Holt-Winters* faz parte de um conjunto de modelos para a previsão abrangido pelo método de amortecimento exponencial que normalmente é empregado para modelar tendência e/ou sazonalidade e é baseado em três equações alisadoras: Uma para o nível, outra para a tendência e outra para a sazonalidade. Esse amortecimento ou ajuste exponencial é um método estatístico que parte de uma equação de médias móveis, ponderadas exponencialmente para obter ajustes em variações aleatórias dos dados da série. Na suavização é utilizada uma ponderação distinta para cada valor observado na série temporal de modo que os valores mais recentes recebam pesos maiores formando um decaimento exponencial a partir de valores mais recentes. (GARDNER, 2006).

A sazonalidade pode ter efeito aditivo ou multiplicativo. Se houver uma variação crescente em uma série heterocedástica é recomendado o modelo multiplicativo, e se a variância se mantiver em séries homocedásticas é indicado o modelo aditivo. Vejamos a representação dos modelos nas Figuras 1 e 2.

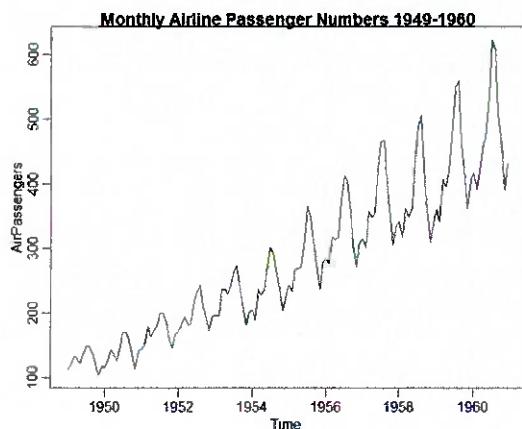


Figura 1 – Passagens Aéreas

Fonte: Autoria Própria

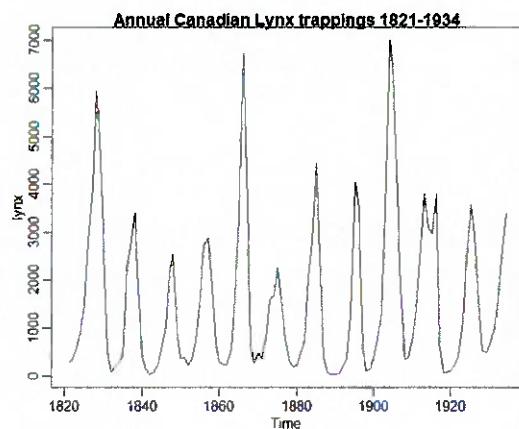


Figura 2 – Linces Capturados

Fonte: Autoria Própria

Pode-se notar que na Figura 1 referente aos totais mensais de passageiros de linhas aéreas internacionais nos EUA, entre 1949 e 1960 temos uma linha crescente na sazonalidade, o que sugere o modelo multiplicativo enquanto que a Figura 2 mostra a série com o número anual de lince capturados em armadilhas entre 1821 e 1934 no Canadá. Existe um padrão cíclico em torno de 10 ou 11 anos o que sugere o modelo aditivo devido ao comportamento constante da série.

2.9.3.1.

2.9.3.2. Modelo Aditivo

O *Holt-Winters* aditivo é indicado quando a variação sazonal tem uma amplitude constante, isto é, a diferença entre o maior e o menor ponto de demanda nos ciclos permanece constante com o passar do tempo.

$$L_t = \alpha(Z_t - S_{t-m}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1; t = m+1, \dots, N \quad (13)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) T_{t-1} \quad 0 \leq \beta \leq 1; t = m+1, \dots, N \quad (14)$$

$$S_t = \gamma(Z_t - L_{t-1} - T_{t-1}) + (1 - \gamma) S_{t-m} \quad 0 \leq \gamma \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (15)$$

$$\hat{Z}_{t+h} = L_t + T_t h + S_{t+h-m}, \quad (16)$$

2.9.3.3. Modelo Multiplicativo

O *Holt-Winters* multiplicativo segue a mesma proposta do modelo aditivo, porém, os métodos são multiplicativos e divisórios ao invés de aditivos ou subtrativos, quando as equações apresentam componente sazonal.

$$L_t = \alpha\left(\frac{Z_t}{S_{t-m}}\right) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (17)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad 0 \leq \beta \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (18)$$

$$S_t = \gamma\left(\frac{Z_t}{L_{t-1} + T_{t-1}}\right) + (1 - \gamma)S_{t-m} \quad 0 \leq \gamma \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (19)$$

$$\hat{Z}_{t+h} = L_t + T_t h + S_{t+h-m}, \quad (20)$$

2.10. Modelo SARIMA

Pela modelagem de Box & Jenkins é possível prever valores futuros baseando-se em dados presentes e passados de uma série temporal fazendo uso de modelos autoregressivos integrados de médias móveis. Ou simplesmente, ARIMA. (AR – Auto regressivos; I- Integrado; MA – Médias Móveis).

O modelo SARIMA é uma evolução do modelo ARIMA no qual existe o tratamento do fator sazonal. A modelagem de séries temporais univariadas estacionárias segue os seguintes passos:

1. Identificar as ordens p e q do modelo.
2. Estimar o modelo.
3. Verificar se os resíduos estimados não rejeitam a hipótese nula de que seja um ruído branco. Se não rejeitam, passa-se ao próximo passo. Se rejeitam, retorna-se ao primeiro passo.

4. Realiza-se a previsão.

Se a série for não estacionária, deve ser diferenciada.

É possível fazer a previsão de valores futuros tomando por base apenas os valores presentes e passados da série, Box & Jenkins (1970). Esses modelos são chamados de modelos autoregressivos integrados de médias móveis ou, simplesmente, ARIMA. Ao incluir relações sazonais o modelo passa a se chamar SARIMA $(p, d, q)(P, D, Q)$, e tem a seguinte representação:

$$\phi(L)\Phi(L)\Delta^d \Delta^D y_t = \theta(L)\Theta(L)\varepsilon_t \quad (21)$$

p, q, d são referentes ao modelo não sazonal.

P, Q, D são referentes ao modelo SAZONAL.

Conforme segue:

p é a ordem do polinômio autoregressivo não sazonal $\phi(L)$;

P é a ordem do polinômio autoregressivo sazonal $\Phi(L)$;

q é a ordem do polinômio de médias móveis não sazonal $\theta(L)$;

Q é a ordem do polinômio de médias móveis sazonal $\Theta(L)$;

d é a ordem de diferença não sazonal.

D é a ordem de diferença sazonal.

$$\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p); \quad (22)$$

$$\Phi(L) = (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_p L^{ps}); \quad (23)$$

$$\theta(L) = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_p L^q); \quad (24)$$

$$\Theta(L) = (1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_p L^{qs}); \quad (25)$$

$$\Delta = 1 - L; \quad (26)$$

L é o operador de defasagem tal que $L^n y_t = y_{t-n}$

3. ANÁLISE EXPLORATÓRIA

Neste capítulo será apresentado o período total das séries estudadas e para cada uma delas será reservado o período de 5 anos para a aplicação do modelo. Em um primeiro momento, as séries serão exibidas graficamente em sua totalidade para obter-se uma visão geral de seu comportamento, em seguida serão exibidas as séries com as funções de auto correlação e autocorrelação parcial que ajudarão em uma primeira análise de seu comportamento sazonal pela análise dos lags da série. Por fim será exibida a sazonalidade das séries com o valor médio para cada mês compreendendo apenas os primeiros cinco anos de cada série e sua decomposição nas componentes ciclo, tendência e sazonalidade seguindo com a subtração da componente tendência para melhor análise da componente sazonal.

No total, serão analisadas quatro séries e reservaremos uma sessão deste capítulo para cada uma delas. São elas:

1. Hipermercados, supermercados, produtos alimentícios, bebidas e fumo
2. Livros, jornais, revistas e papelaria
3. Tecidos, vestuário e calcados
4. Produção física da indústria de transformação

3.1. Hipermercados, Supermercados, Produtos Alimentícios Bebidas e Fumo

O período estudado comprehende os meses de janeiro de 2000 a setembro de 2015. Foram separados para a modelagem o período de 5 anos (01/2000 a 01/2006) e para o backtesting, o período de fevereiro de 2006 a setembro de 2015. Sua representação é mostrada na Figura 3.

Ao observar a série, pode-se notar que de 2000 a 2004 temos um comportamento estável no volume de vendas do varejo e em seguida tivemos crescimento seguindo uma tendência crescente até meados de 2013. A variância da série nos parece constante durante toda série, exceto no final que parece ter aumentado levemente.

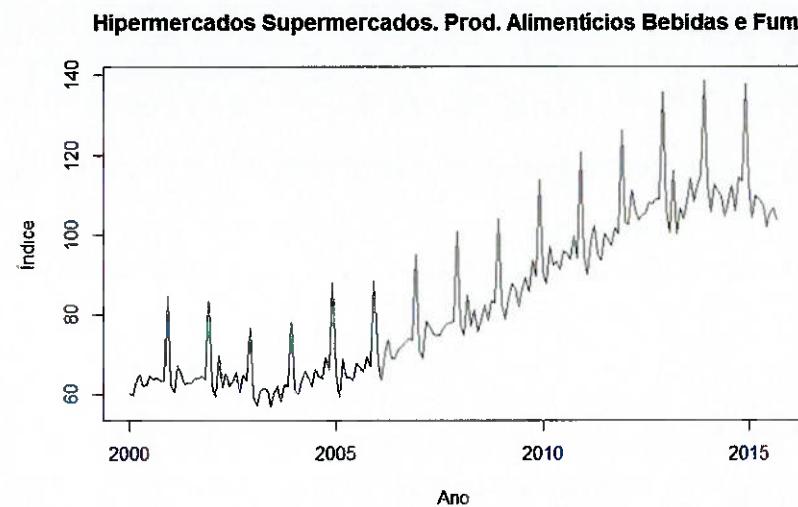


Figura 3 - Série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

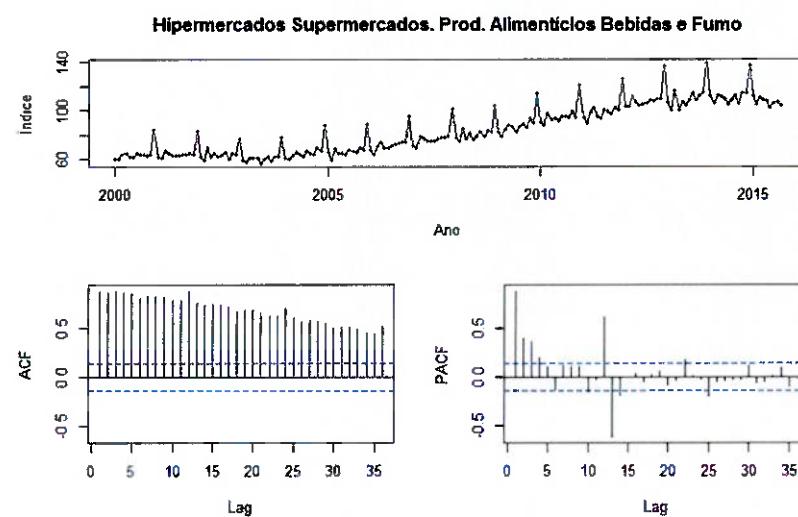


Figura 4 - Série com ACF e PACF: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

A Sazonalidade é visível na série, observa-se que sempre um período estável seguido de crescimento brusco atingindo um pico e dando início à queda voltando ao patamar inicial seguindo um período estável e se repetindo por toda a série.

Na Figura 4, apresenta-se a Figura da série, juntamente com a função de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF).

Nota-se pelos *lags* da Figura de autocorrelação – ACF a presença de um comportamento que se repete a cada 12 períodos, onde temos na lag 1, na 12 e na 24 os picos indicando que a sazonalidade é de período anual. Analisar-se-á melhor a sazonalidade no tópico a seguir.

3.1.1. Análise da Sazonalidade

Na sessão anterior foi efetuada a análise da série no período de 2000 a 2015. A partir de agora, faremos a análise do período de 5 anos a ser tratado na modelagem.

Para melhor análise do comportamento sazonal da série, após a identificação do período da sazonalidade, anual, partiremos para análise do comportamento sazonal na visão mensal. Identificar-se-ão os meses de maior volume de vendas nesse ciclo sazonal anual. Considere a Figura 5:

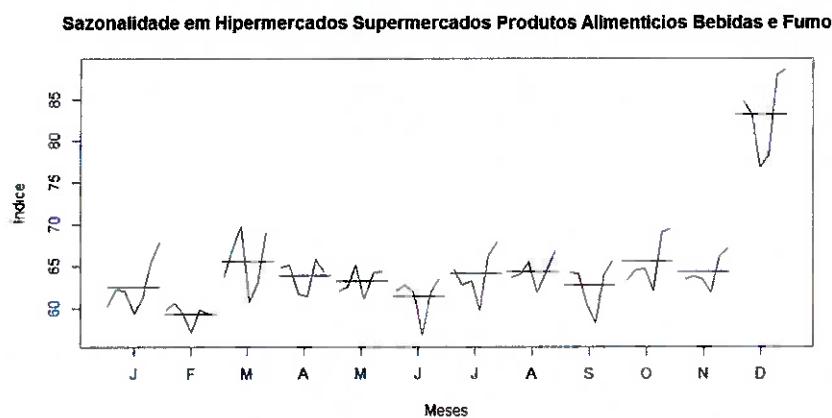


Figura 5 - Análise sazonal da série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

Na Figura 5, onde é feita uma média de cinco anos da série, nota-se que o número médio de produção (traços horizontais) não teve grandes oscilações de janeiro a novembro. Já em dezembro é o mês da alta nas vendas do varejo.

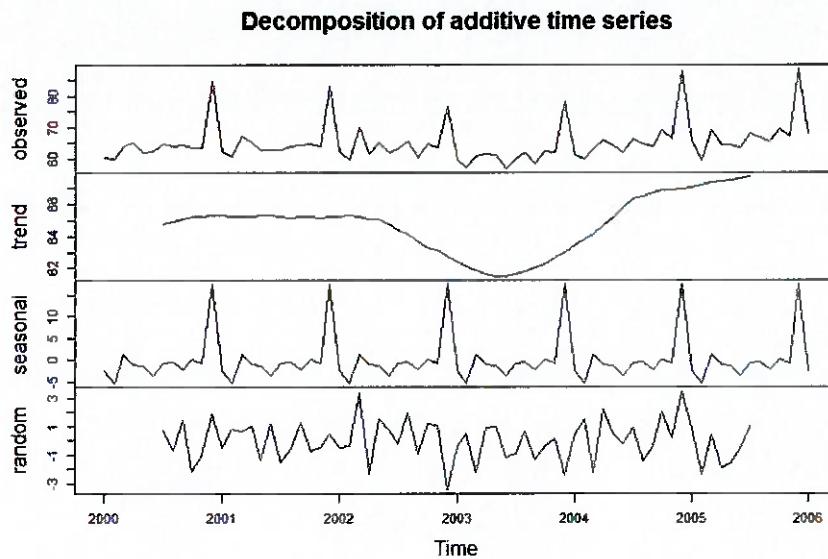


Figura 6 - Decomposição da série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

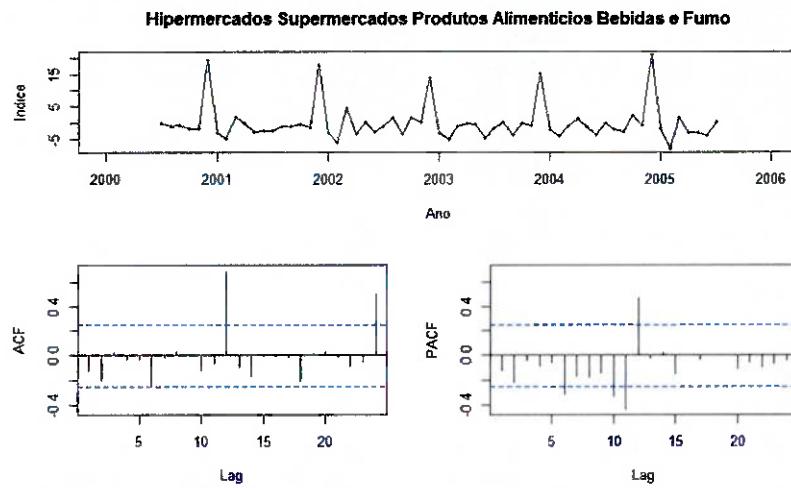


Figura 7 - Série subtraída da componente sazonal: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo.

Fonte: Elaboração Própria

Devido a essa variação na média observa-se indícios de não estacionariedade na parte sazonal da série.

Em seguida, será feita uma decomposição aditiva da série e, após isso, será eliminada a componente de tendências, com vistas a evidenciar a componente

sazonal. A decomposição é ilustrada na Figura 6 e a série sem a componente sazonal é apresentada na Figura 7.

Com base na ACF, fica evidenciada uma componente de sazonalidade com estação sazonal igual a 12.

3.2. Livros, Jornais, Revistas e Papelaria

O período estudado compreende os meses de janeiro de 2003 a setembro de 2015. Foram separados para a modelagem o período de 5 anos (01/2003 a 01/2008) e para o *backtesting*, o período de fevereiro de 2008 a setembro de 2015. Sua representação é exibida na Figura 8.

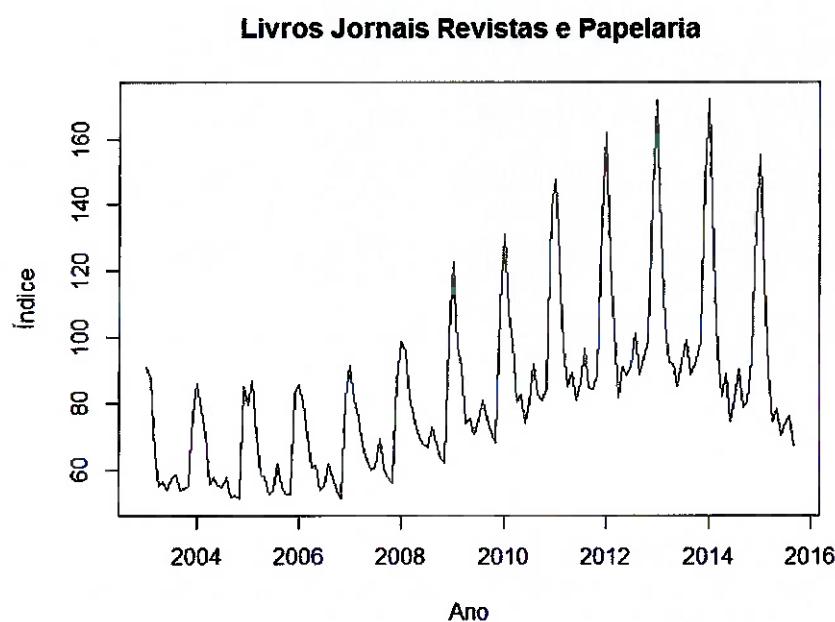


Figura 8 - Série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Ao observar a série, na Figura 8, pode-se notar que de 2004 a 2008 ficou evidenciado um comportamento estável no volume de vendas do varejo seguido de um período de crescimento até meados de 2013 quando começa a cair o volume de vendas anual em 2016 voltando ao patamar de 2010.

A variância da série na parte sazonal tem crescimento expressivo com o passar do tempo indicando não estacionariedade da parte sazonal.

A Sazonalidade é visível na série pois observa-se que sempre no início do ano há um pico nas vendas que segue em decrescimento até o final do ano e volta a crescer no início do ano seguinte, se repetindo por toda a série.

Na Figura 9, apresenta-se a Figura da série, juntamente com a função de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF).

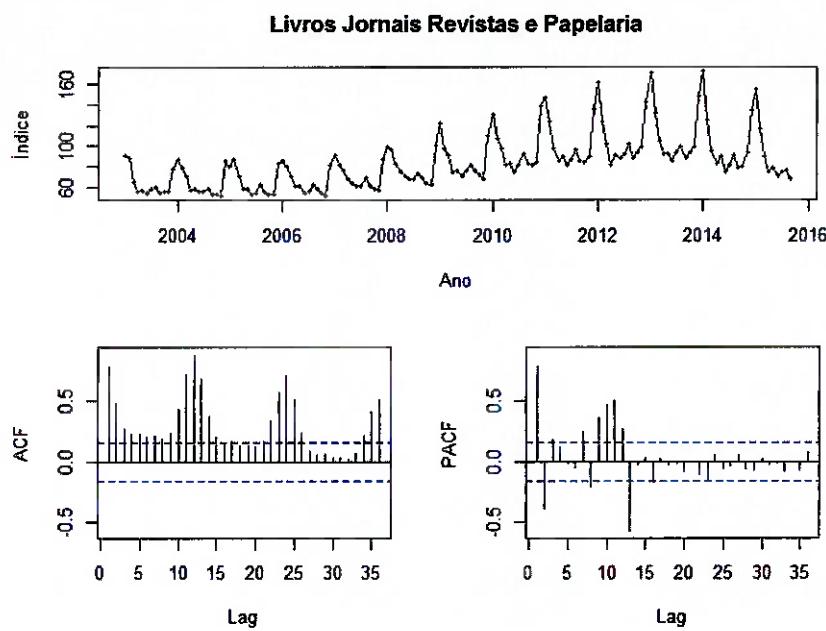


Figura 9 - Série com ACF e PACF: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Em análise a Figura 9, nota-se pelos *lags* da Figura de autocorrelação – ACF a presença de um comportamento que se repete a cada 12 períodos, onde observa-se na lag 1, na 12 e na 24 os picos da Figura indicando que a sazonalidade é de período anual. Analisar-se-á melhor a sazonalidade no tópico a seguir. Inicialmente, o modelo estimado sugerido é um modelo arima com os parâmetros SARIMA(1,2) conforme as *lags* das Figuras ACF e PACF. “A FAC define a defasagem do MA. A FACP define a defasagem do AR. No primeiro caso, sabe-se que a função de autocorrelação decai com o aumento da defasagem p. No segundo caso, ocorre o

inverso: a função de autocorrelação é truncada na defasagem q , e a função de autocorrelação parcial decai[...]" (BUENO, 2012, p.47).

3.2.1. Análise da Sazonalidade

Na sessão anterior foi efetuada a análise da série no período de 2003 a 2015. A partir de agora, faremos a análise do período de 5 anos a ser tratado na modelagem.

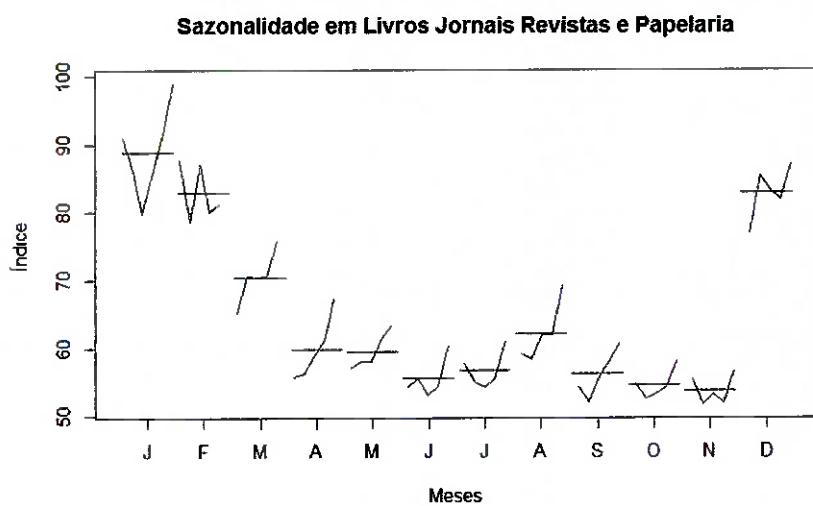


Figura 10 - Análise sazonal da série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Para melhor análise do comportamento sazonal da série, após a identificação do período da sazonalidade, anual, partiu-se à para análise do comportamento sazonal na visão mensal na figura 10. Identificar-se-ão os meses de maior volume de vendas nesse ciclo sazonal anual. Ainda na figura 10, onde é feita a média de cinco anos da série, nota-se que o número médio de produção (traços horizontais) teve grandes oscilações de janeiro a dezembro sendo que os meses de janeiro e dezembro têm o maior volume de vendas no varejo nesta categoria.

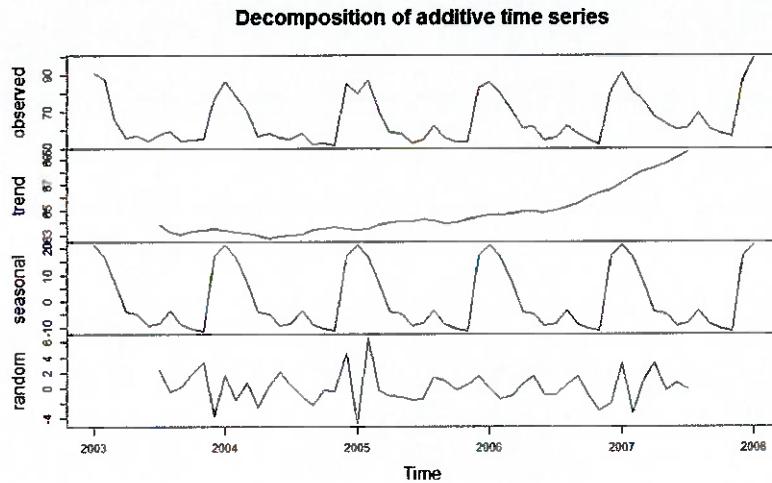


Figura 11 - Decomposição da série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

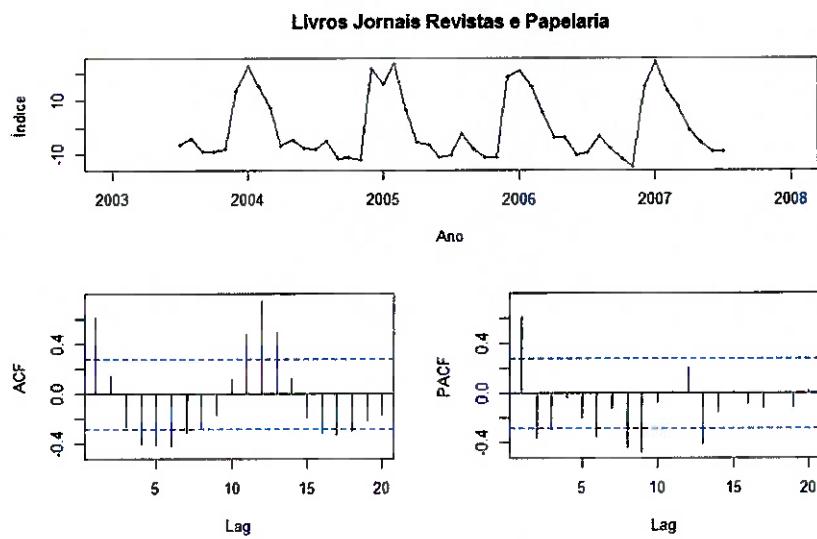


Figura 12 - Série subtraída da componente sazonal: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Devido a essa variação na média observa-se indícios de não estacionariedade na parte sazonal da série.

Em seguida, será feita uma decomposição aditiva da série conforme Barros (2018) e, após isso, será eliminada a componente de tendências, com vistas a

evidenciar a componente sazonal. A decomposição é ilustrada na Figura 11 e a série sem a componente sazonal é apresentada na Figura 12.

Com base na ACF, fica evidenciada uma componente de sazonalidade com estação sazonal igual a 12. O formato senoidal dos *lags* na Figura 12 indica estacionariedade da série e com base nos lags da ACF e PACF, pode-se sugerir um modelo *SARIMA(1,1)*.

3.3. Tecidos Vestuários e Calçados

O período estudado compreende os meses de janeiro de 2000 a setembro de 2015. Foram separados para a modelagem o período de 5 anos (01/2000 a 01/2006) e para o *backtesting*, o período de fevereiro de 2006 a setembro de 2015. Sua representação é exibida na Figura 13.

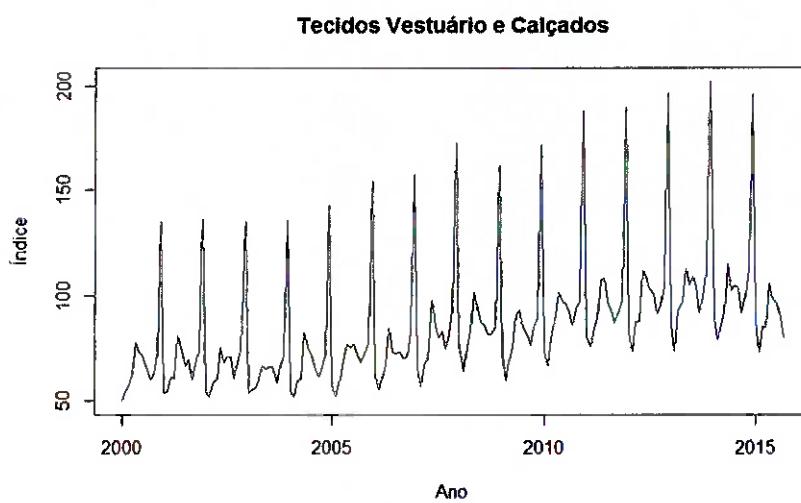


Figura 13 - Série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

Ao observar a série, na Figura 13, pode-se notar que de 2000 a 2005 observa-se um comportamento estável no volume de vendas do varejo seguido de um período de leve crescimento até meados de 2015.

A variância da série na parte sazonal tem crescimento expressivo com o passar do tempo indicando não estacionariedade da parte sazonal enquanto da parte não sazonal permanece, aparentemente, constante.

A Sazonalidade é visível na série, observa-se que sempre no final do ano um pico nas vendas e logo cai e esse comportamento é repetido em toda a série.

Na Figura 14, apresenta-se a Figura da série, juntamente com a função de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF).

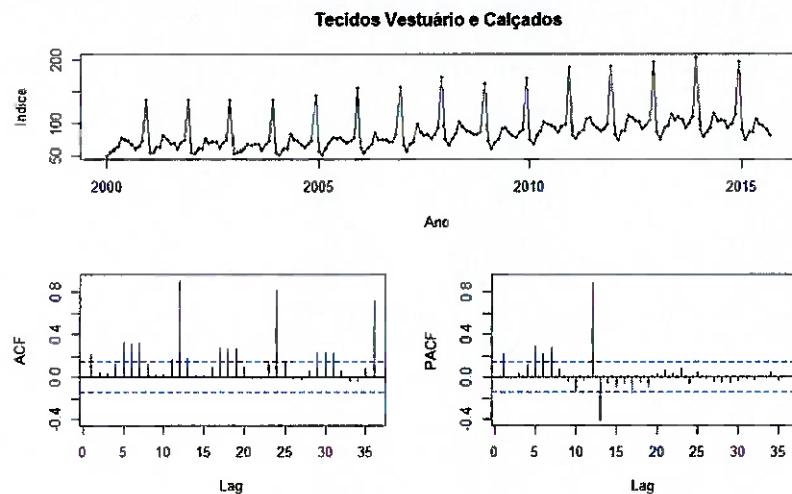


Figura 14 - Série com ACF e PACF: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

Em análise a Figura 14, nota-se pelos *lags* da Figura de autocorrelação – ACF a presença de um comportamento que se repete a cada 12 períodos, onde observa-se na lag 1, na 12 e na 24 os picos da Figura indicando que a sazonalidade é de período anual. Analisar-se-á melhor a sazonalidade no tópico a seguir onde será exibido o gráfico com a média mensal da sazonalidade e será possível analisar sua variação.

3.3.1. Análise da Sazonalidade

Na sessão anterior foi efetuada a análise da série no período de 2000 a 2015. A partir de agora, faremos a análise do período de 5 anos a ser tratado na modelagem.

Para melhor análise do comportamento sazonal da série, após a identificação do período da sazonalidade, anual, partir-se-á para análise do comportamento sazonal na visão mensal. Identificar-se-ão os meses de maior volume de vendas nesse ciclo sazonal anual. Considere a Figura 15:

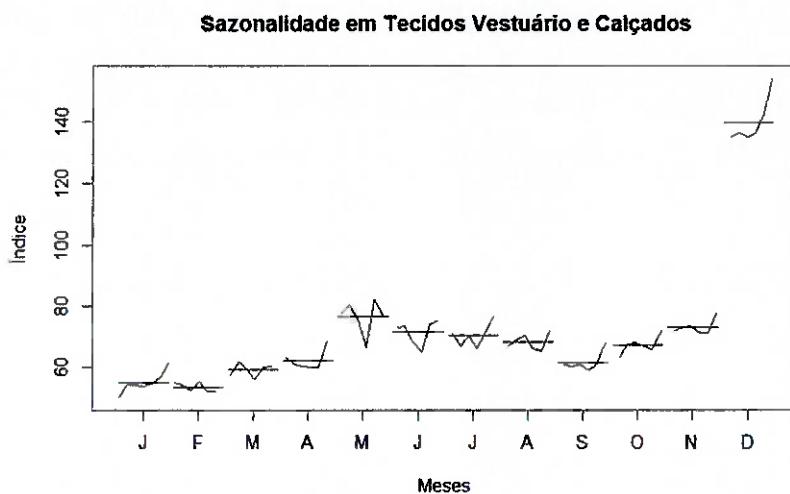


Figura 15 - Análise sazonal da série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

Na Figura 15, onde é feita uma média de cinco anos da série, nota-se que o número médio de produção (traços horizontais) não teve grandes oscilações de janeiro a dezembro sendo que o mês de dezembro tem o maior volume de vendas no varejo nesta categoria.

Devido a essa variação na média observa-se indícios de não estacionariedade na parte sazonal da série, Bueno (2012). O que pode sugerir a necessidade de diferenciação da série na parte sazonal no momento da modelagem pelo modelo SARIMA.

Em seguida, será feita uma decomposição aditiva da série e, após isso, será eliminada a componente de tendências, com vistas a evidenciar a componente

sazonal. A decomposição é ilustrada na Figura 16 e a série sem a componente sazonal é apresentada na Figura 17.

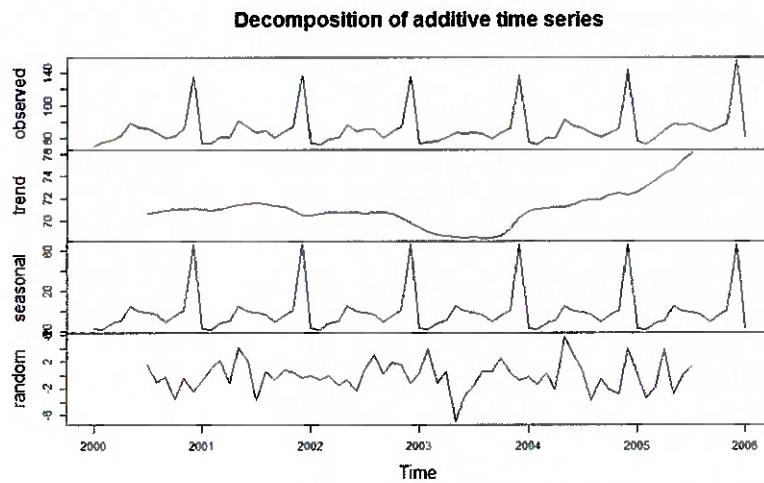


Figura 16 - Decomposição da série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

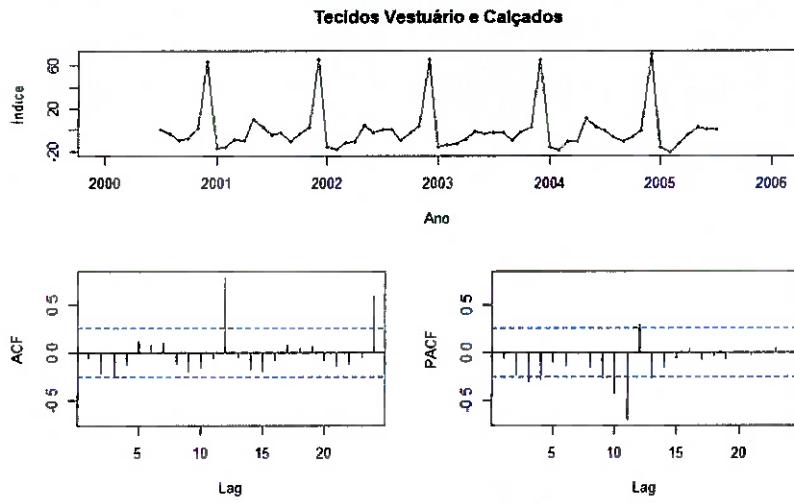


Figura 17 - Série subtraída da componente sazonal: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

De acordo com a decomposição clássica de séries temporais, uma ST pode ser decomposta em quatro componentes não

observáveis: tendência, ciclo, sazonalidade e erro. Geralmente as componentes de tendência e ciclo permanecem agregadas devido ao número de observações da ST não ser suficiente para uma boa estimativa da componente de ciclo separadamente, (BARROS, sessão 4.3.3, 2018).

Com base na ACF, fica evidenciada uma componente de sazonalidade com estação sazonal igual a 12.

3.4. Produção Física da Indústria de Transformação

O período estudado compreende os meses de janeiro de 1991 a fevereiro de 2014. Foram separados para a modelagem o período de 5 anos (01/1991 a 01/1996) e para o *backtesting*, o período de fevereiro de 1996 a fevereiro de 2014. Sua representação é exibida na Figura 18.

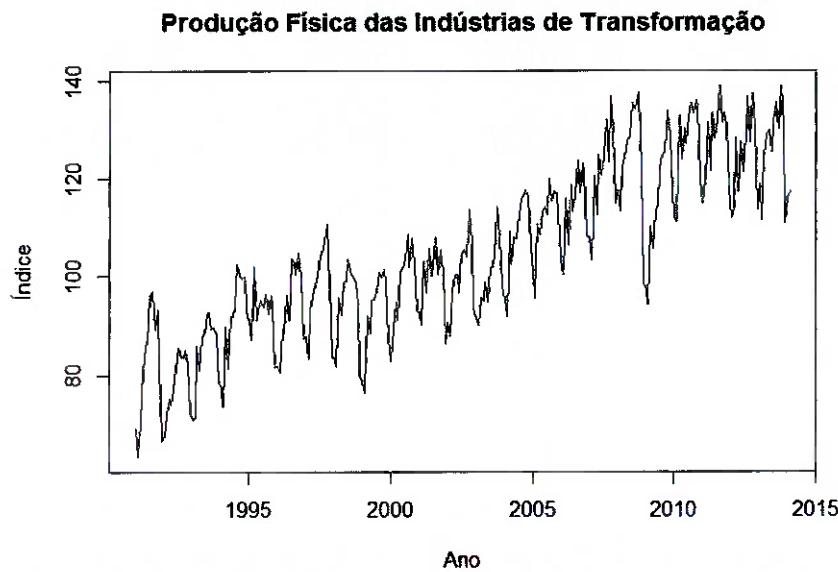


Figura 18 - Série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Ao observar a série, na Figura 18, pode-se notar que de 1991 a 2007 observa-se um comportamento crescente na produção das indústrias seguida de uma

queda próximo a 2008 em decorrência, possivelmente, da crise imobiliária no Estados Unidos e a partir de então não houve crescimento da produção seguindo estável até 2014.

A sazonalidade é visível na série. Observa-se que há sempre um ciclo de crescimento atingindo um pico e dando início à queda voltando ao patamar inicial e se repetindo por toda a série.

Na Figura 19, apresenta-se a Figura da série, juntamente com a função de autocorrelação (ACF) e autocorrelação parcial (PACF).

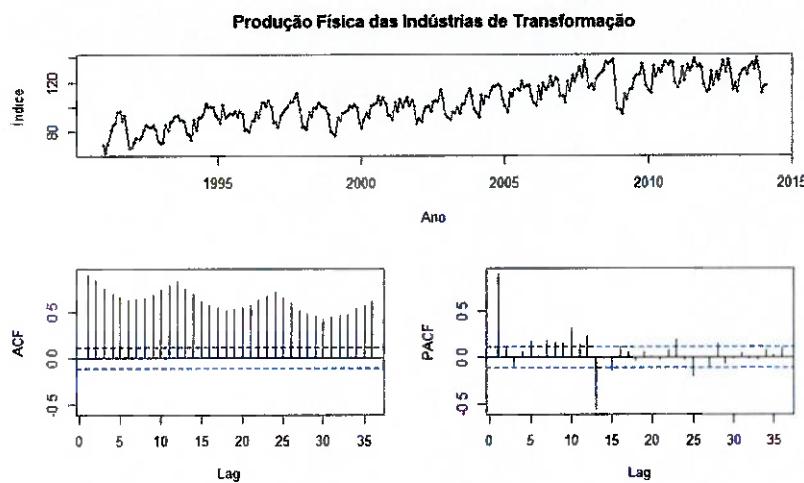


Figura 19 - Série com ACF e PACF: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Em análise a Figura 19, nota-se pelos *lags* da Figura de autocorrelação – ACF a presença de um comportamento que se repete a cada 12 períodos, onde observa-se na lag 1, na 12 e na 24 os picos da Figura indicando que a sazonalidade é de período anual. Analisar-se-á melhor a sazonalidade no tópico a seguir onde será exibido o gráfico com a média mensal da sazonalidade da série e será possível visualizar sua variação e obter uma definição de estacionariedade ou não estacionariedade da parte sazonal. Caso haja uma variação na média poderá ser necessária a diferenciação da série na parte sazonal.

3.4.1. Análise da Sazonalidade

Na sessão anterior foi efetuada a análise da série no período de 1991 a 2014. A partir de agora, faremos a análise do período de 5 anos a ser tratado na modelagem.

Para melhor análise do comportamento sazonal da série, após a identificação do período da sazonalidade, anual, partiu-se-a para análise do comportamento sazonal na visão mensal. Identificar-se-ão os meses de maior produção nesse ciclo sazonal anual. Considere a Figura 20, onde é feita uma média de cinco anos da série, nota-se que o número médio de produção (traços horizontais) inicia com janeiro e fevereiro sem crescimento, em março observa-se um crescimento seguido de uma queda em abril e a partir de maio segue crescente até agosto.

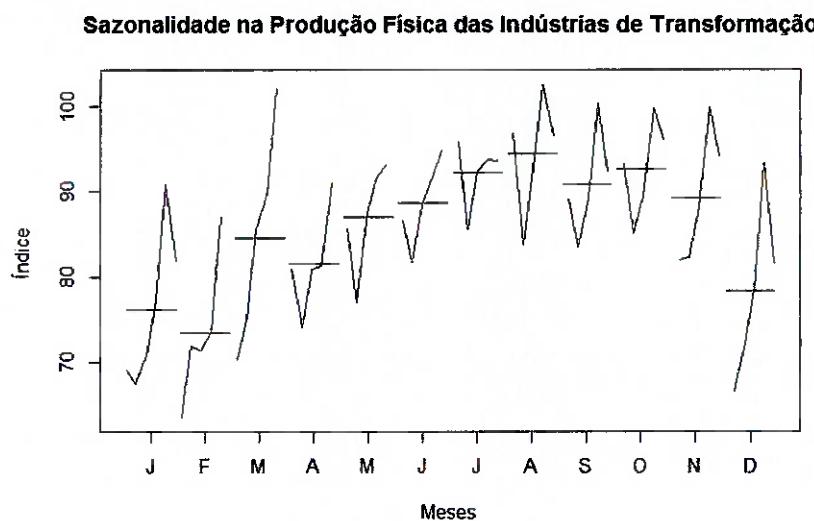


Figura 20 - Análise sazonal da série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Em setembro, outubro e novembro observa-se uma pequena oscilação já indicando uma possível queda em dezembro que volta ao patamar próximo do a presença de em janeiro, devido a essa variação na média observa-se indícios de não estacionariedade na parte sazonal da série.

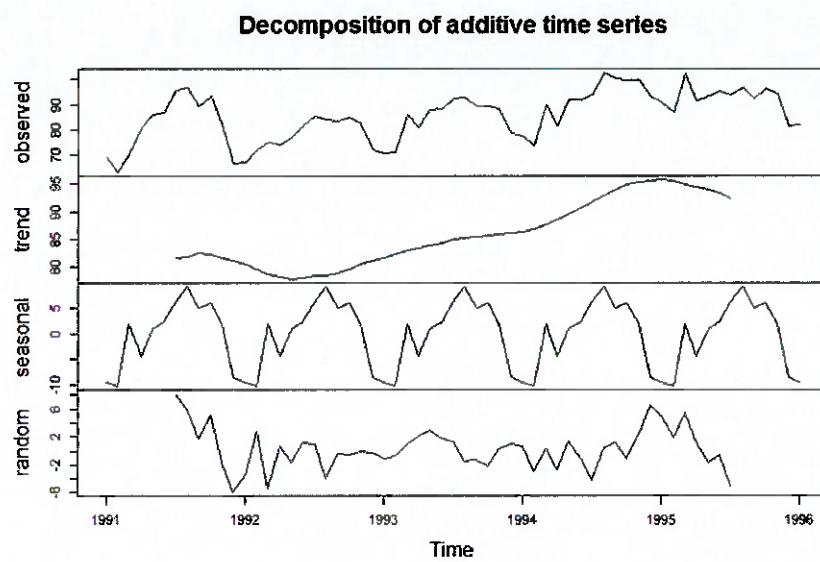


Figura 21 - Decomposição da série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

A decomposição aditiva da série ajuda na compreensão de suas componentes, por isso, será eliminada a componente de tendências, com vistas a evidenciar a componente sazonal. A decomposição é ilustrada na Figura 21 e a série sem a componente sazonal é apresentada na Figura 22.

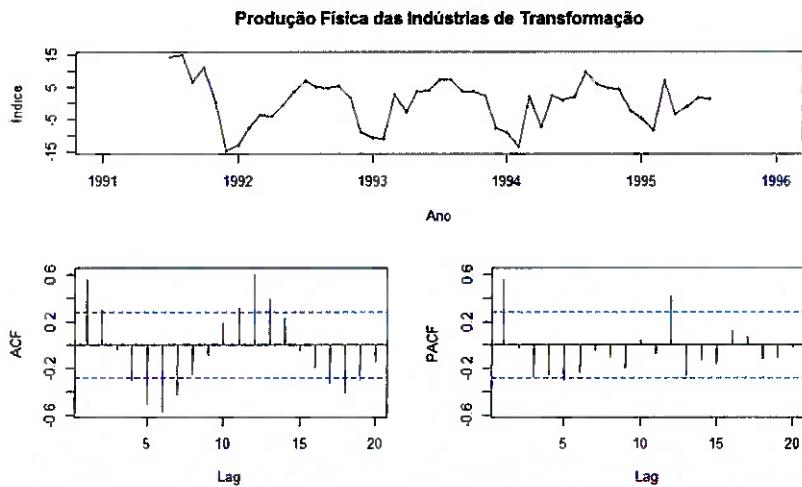


Figura 22 - Série subtraída da componente sazonal: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Com base na ACF, fica evidenciada uma componente de sazonalidade com estação sazonal igual a 12 e pelo seu desenho senoidal pode-se ter uma série estacionária, conforme descrito pela teoria de Box e Jenkins, (BARROS, et. al., 2018) Os lags sugerem um modelo *SARIMA(1,2)*.

4. MODELAGEM

No capítulo 2 foi mencionado que a sazonalidade pode ter efeito aditivo ou multiplicativo, sendo que quando há uma variação crescente na série é recomendado a aplicação do modelo multiplicativo. De todo modo, prosseguir-se-á neste capítulo com a aplicação dos dois modelos, aditivo e multiplicativo e em seguida com a comparação dos resultados. Baseando-se nas análises gráficas e nos testes efetuados no capítulo 3, pôde-se notar que as séries, de modo geral, têm comportamento cíclico anual, cada uma com uma variação específica distribuídas entre os meses do ano. Por esse motivo será feita a modelagem por dois métodos que tratam da sazonalidade, o primeiro será o modelo de *Holt-Winters* aditivo e multiplicativo e o segundo será o modelo SARIMA, sugerido automaticamente pela função auto.arima do R. As previsões serão feitas com um passo à frente e será computada a métrica de erro de previsão. Em seguida, em todos os casos, uma janela final de cada série será reservada para a validação da previsão H=20 passos à frente.

Na modelagem, para fins de comparação, será considerada a métrica: Erro médio quadrático (EMQ) de previsão um passo à frente. Por fim, será feita a análise comparativa do EMQ da previsão final com H=20 passos à frente.

4.1. Hipermercados Supermercados Produtos Alimentícios Bebidas e Fumo

4.1.1. Modelagem pelo Método de Holt-Winters

Ao aplicar o modelo multiplicativo de Holt-Winters pode-se notar, na Figura 23, que o modelo não se aproxima muito da série original, no entanto tem uma aproximação relevante visto que é o mais indicado para as características apresentadas na série. Vemos que é uma série com variação na parte sazonal e com uma leve tendência crescente, o que indica que o modelo multiplicativo é o ideal para o tratamento e modelagem dos dados.

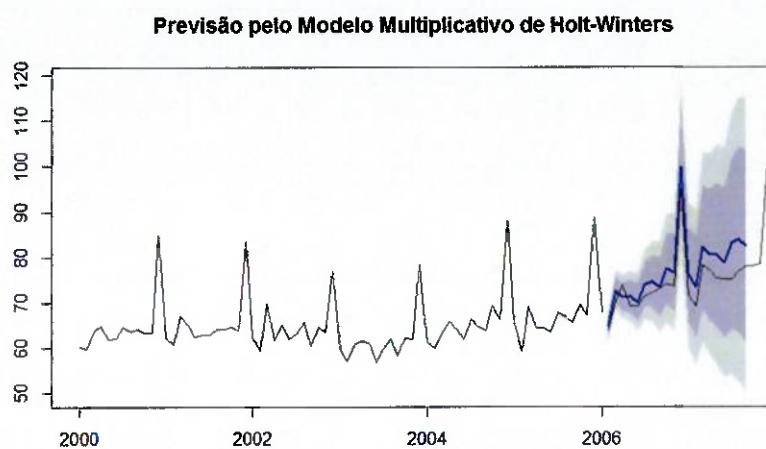


Figura 23 - Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Hipermercados Supermercados.
Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo.

Fonte: Elaboração Própria

Na Figura 24 é apresentado o resultado da aplicação do modelo aditivo. Em seguida, apresenta-se nas Figuras 25 e 26 a Figura dos resíduos do modelo. Aparentemente, em ambos os casos, os resíduos ficaram razoavelmente descorrelacionados

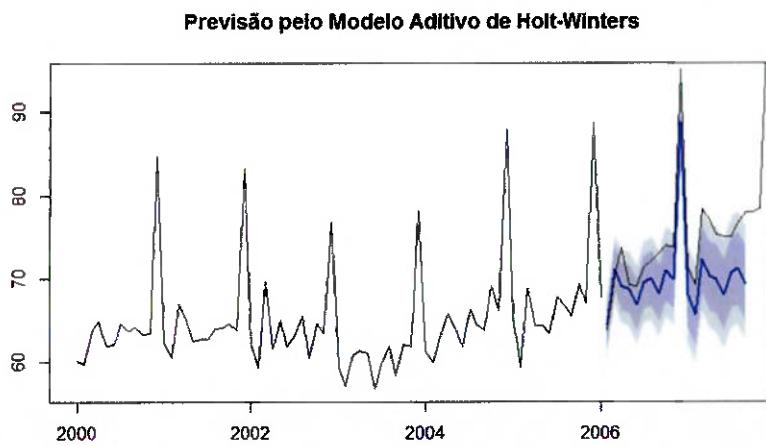


Figura 24 - Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

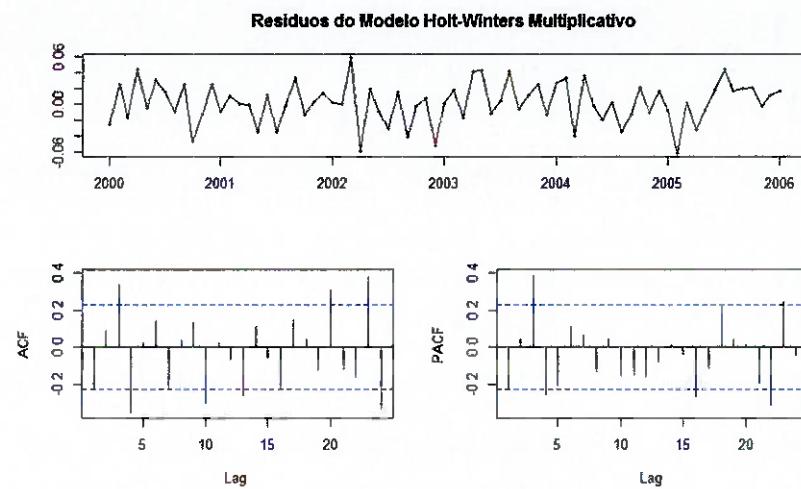


Figura 25 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Hipermercados Supermercados, Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

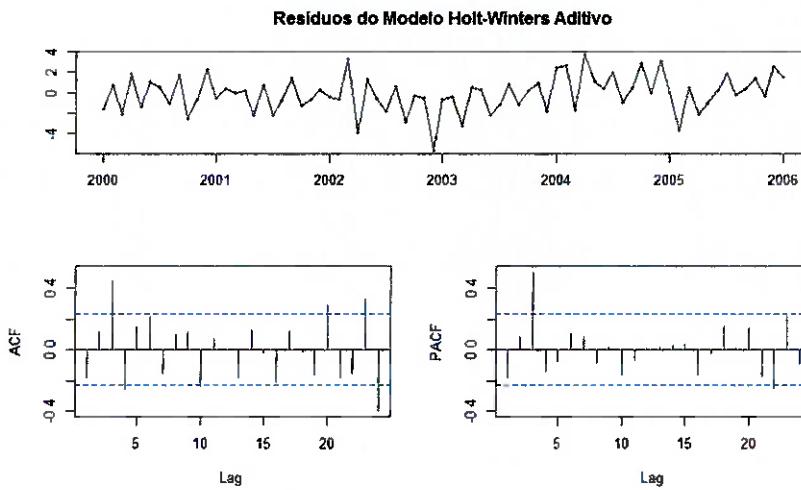


Figura 26 - Resíduos do Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Hipermercados Supermercados, Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

4.1.2. Modelagem pelo Método SARIMA

Na Figura 27 apresenta-se o modelo sugerido pela função “auto.arima” do R, em que dada a série, os modelos são analisados e é retornado o modelo que

mais minimiza os critérios de AIC, AICC, e BIC. O critério utilizado foi o AIC.

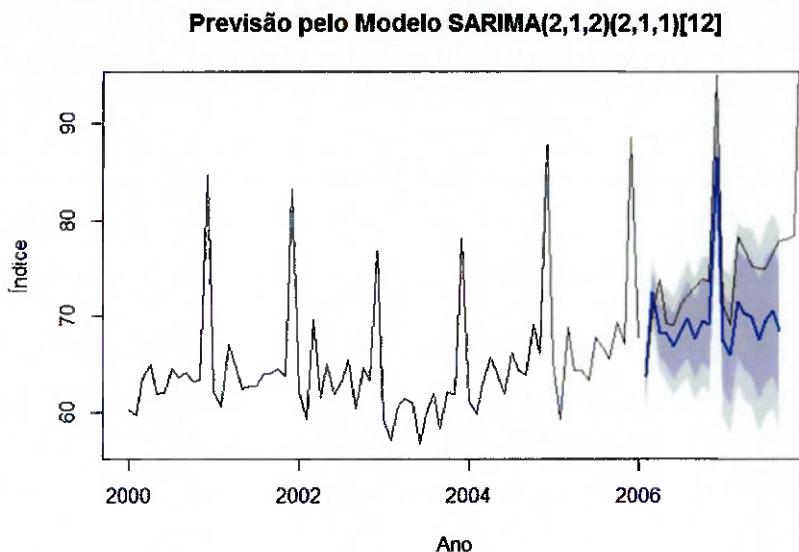


Figura 27 - Modelo SARIMA na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

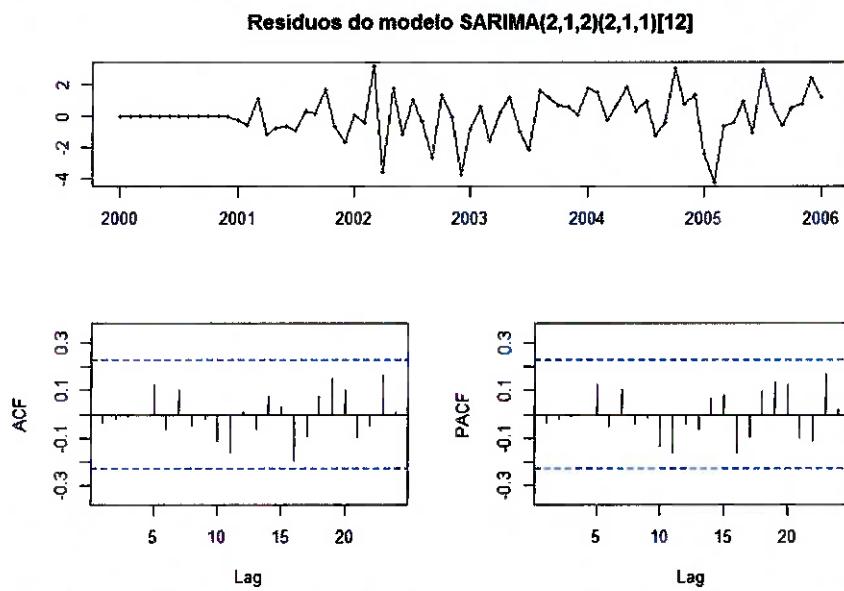


Figura 28 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Hipermercados Supermercados. Prod. Alimentícios Bebidas e Fumo

Fonte: Elaboração Própria

Pode-se notar pela Figura 27, da previsão pelo modelo SARIMA, que a previsão H passos à frente não está tão próxima da série original, no entanto, na Figura 28, dos resíduos do modelo SARIMA, nota-se na ACF e PACF que o resíduo está descorrelacionado sem decrescimento lento ou exponencial o que significa que o modelo capturou toda a componente sazonal.

4.2. Livros Jornais Revistas e Papelaria

4.2.1. Modelagem pelo Método de Holt-Winters

Pode-se notar, na Figura 29, que modelo multiplicativo se aproxima da série original, no entanto, serão usadas as métricas de erros dos modelos para a comparação efetiva. Pela comparação dos modelos na análise das Figuras dos resíduos pode-se notar que o modelo multiplicativo teve erros mais descorrelacionados indicando melhor desempenho comprovando a teoria de que séries com a amplitude da variação crescente devem ser modeladas pelo método multiplicativo.

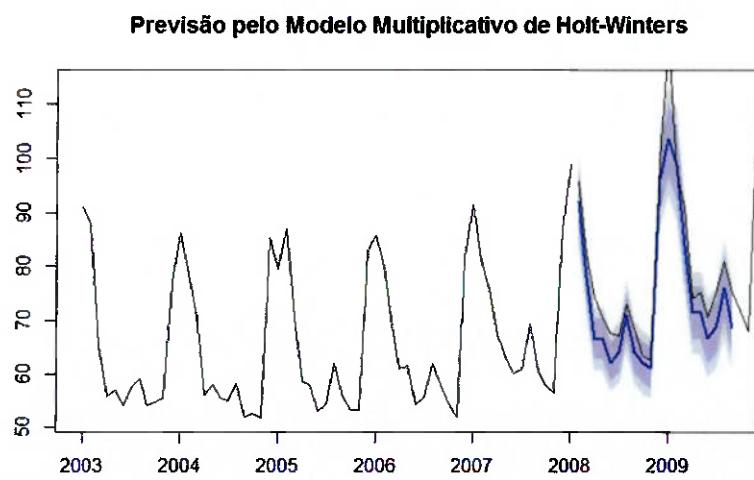


Figura 29 - Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Na Figura 30 é apresentado o resultado da aplicação do modelo aditivo.

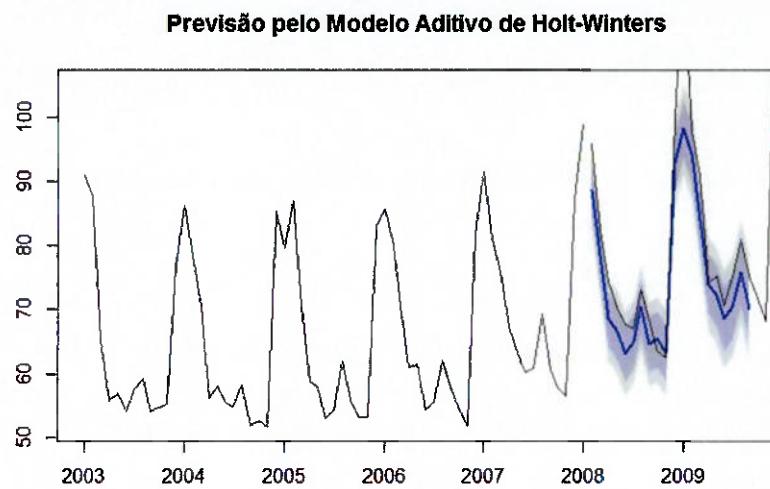


Figura 30 - Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Em seguida, apresenta-se nas Figuras 31 e 32 a Figura dos resíduos do modelo.

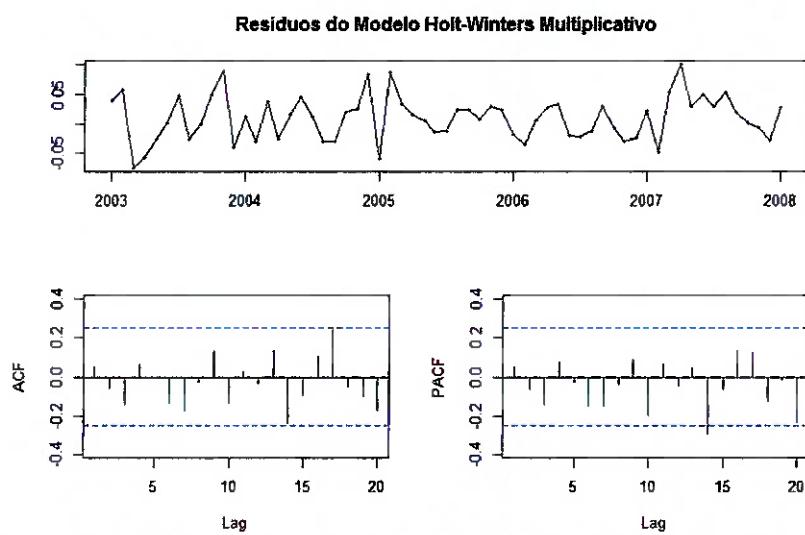


Figura 31 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

Aparentemente, em ambos os casos, os resíduos ficaram descorrelacionados mostrando um bom desempenho do modelo.

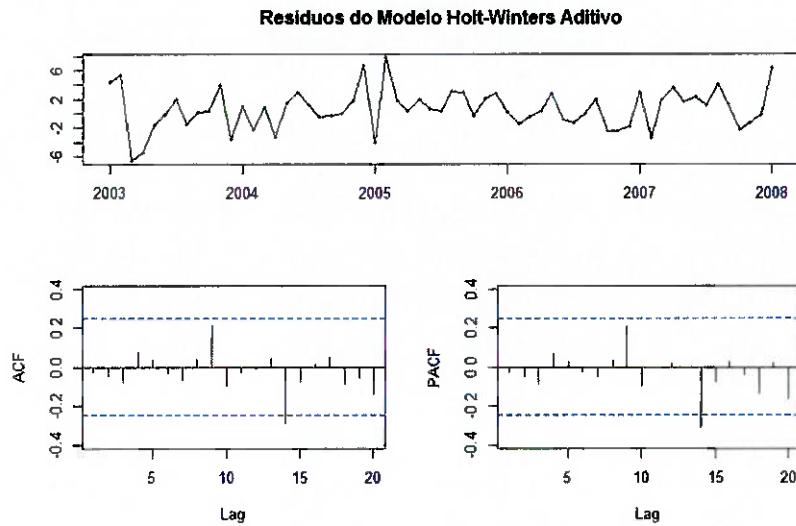


Figura 32 - Resíduos do Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

4.2.2. Modelagem pelo método SARIMA

A Figura, abaixo, mostra o modelo sugerido pela função “auto.arima” do R, em que dada a série os modelos são analisados e é retornado o modelo que mais minimiza os critérios de AIC, AICC, e BIC.

Pode-se notar pela Figura 33, da previsão pelo modelo SARIMA, que a previsão está próxima da série original, no entanto, na Figura 34, dos resíduos do modelo SARIMA, nota-se na ACF e PACF que o resíduo está descorrelacionado sem decrescimento lento ou exponencial o que significa que o modelo capturou a componente sazonal mas ainda ficamos com alguns *lags* ultrapassando a linha pontilhada.

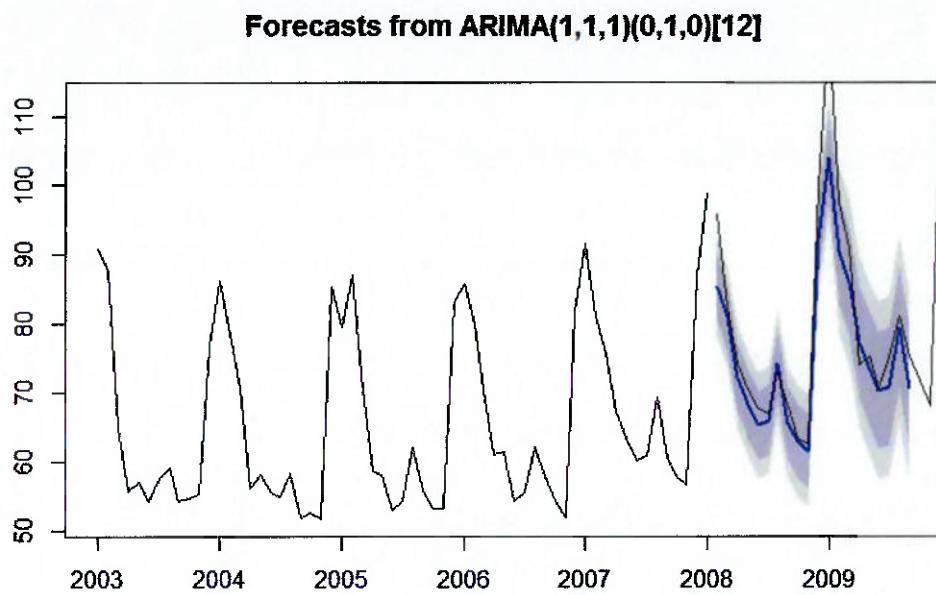


Figura 33 - Modelo SARIMA na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

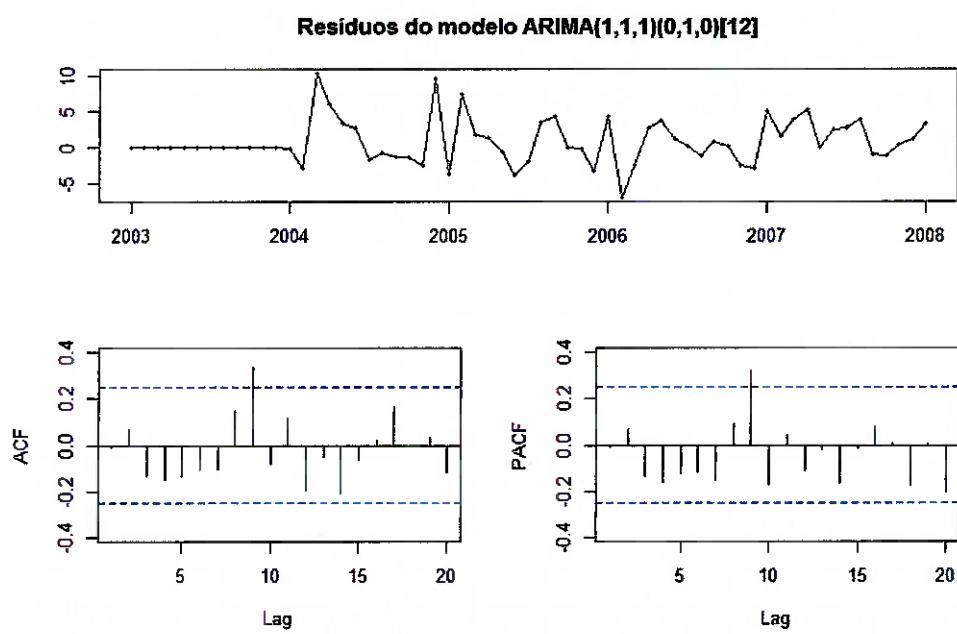


Figura 34 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Elaboração Própria

4.3. Tecidos Vestuários e Calçados

4.3.1. Modelagem pelo Método de Holt-Winters

Na Figura 35 é ilustrado o modelo multiplicativo e na Figura 36 é exibido o modelo de *Holt-Winters* aditivo. Ambos modelos se aproximaram da série original, não ficando evidente somente pela análise gráfica qual é o melhor modelo. Devido a isso, serão usadas as métricas de erros dos modelos, apresentadas no final dessa sessão, para a comparação efetiva. A análise dos resíduos pode ajudar na identificação do melhor modelo quando se deseja identificá-lo apenas pela análise gráfica.

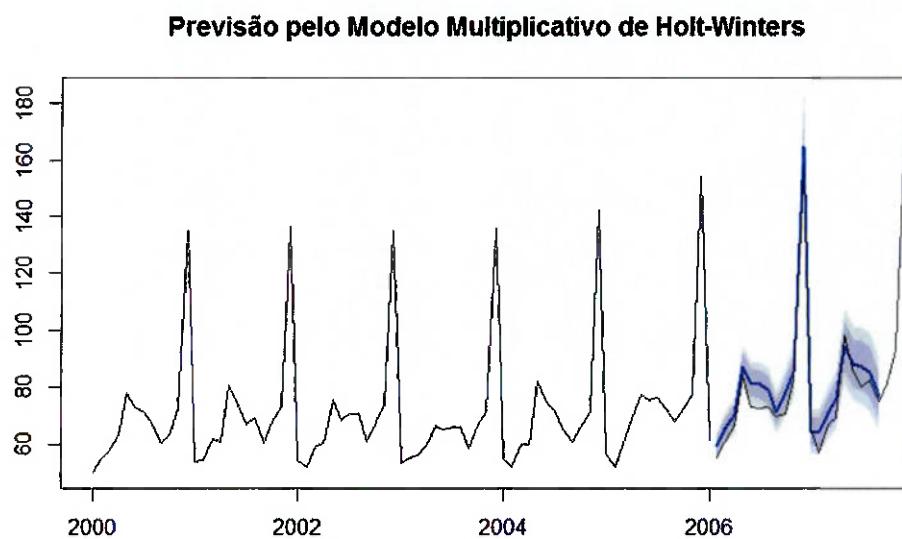


Figura 35 - Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

Pela comparação dos modelos na análise das Figuras 37 e 38 pode-se notar que o modelo aditivo apresenta erros mais descorrelacionados indicando melhor desempenho.

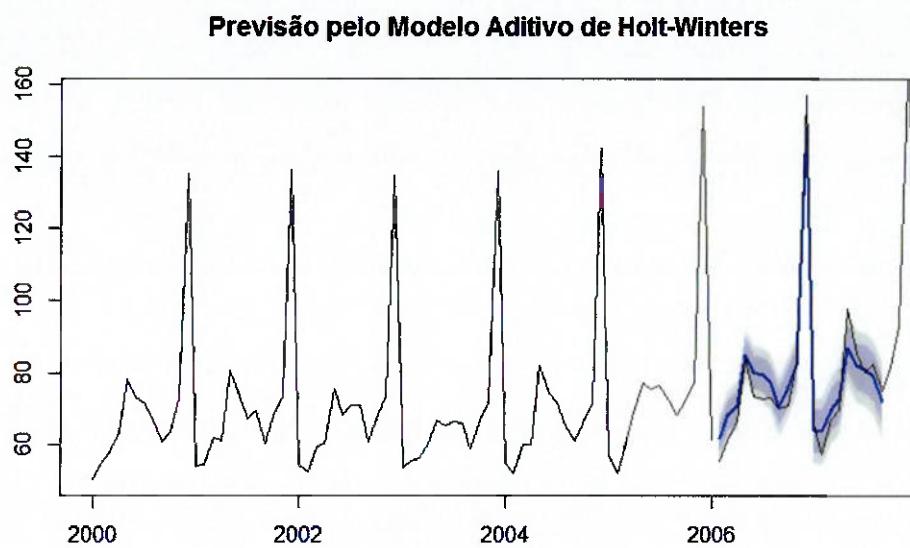


Figura 36 - Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

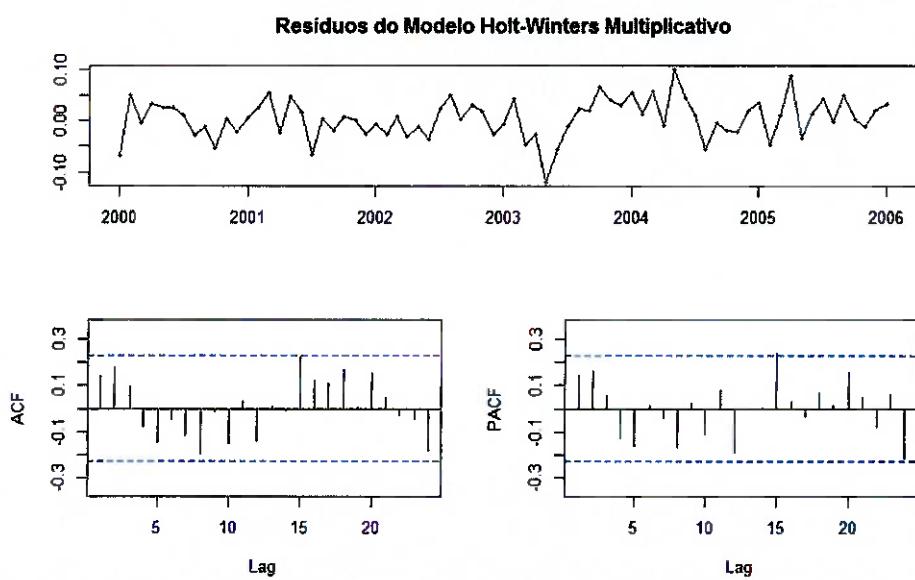


Figura 37 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

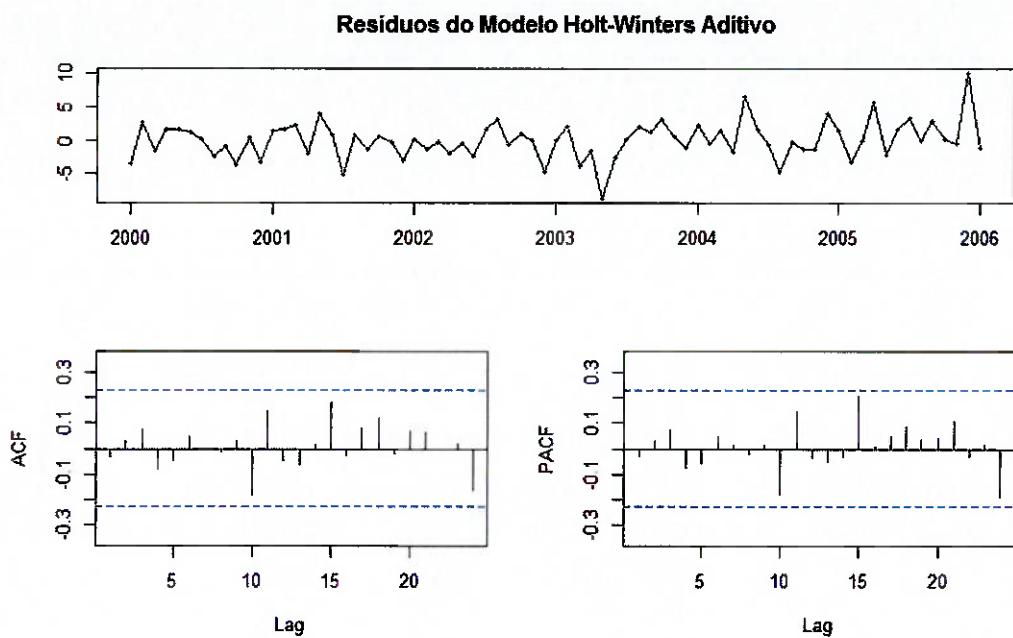


Figura 38 - Resíduos do Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

4.3.2. Modelagem pelo Método SARIMA

A Figura 39 mostra o modelo sugerido pela função “auto.arima” do R em que são analisados os critérios de AIC, AICC, e BIC e retornado o modelo que obteve o menor valor para o critério AIC.

Pode-se notar pela Figura 39, da previsão pelo modelo SARIMA, que a previsão está próxima da série original.

No entanto, na Figura 40, dos resíduos do modelo SARIMA, nota-se na ACF e PACF que o resíduo está descorrelacionado sem decrescimento lento ou exponencial o que significa que o modelo capturou a componente sazonal, no entanto, ainda ficamos com alguns lags ultrapassando a linha pontilhada.

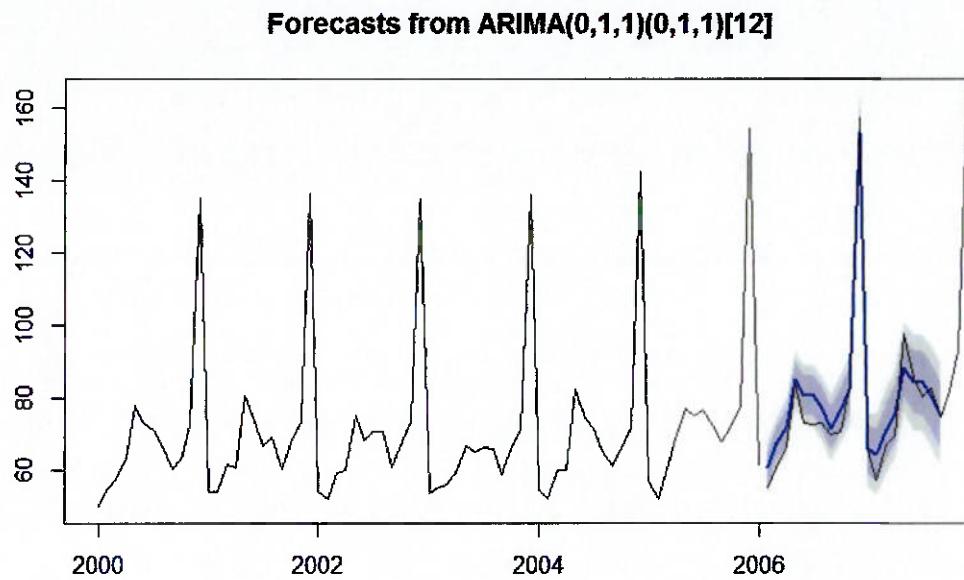


Figura 39 - Modelo SARIMA na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

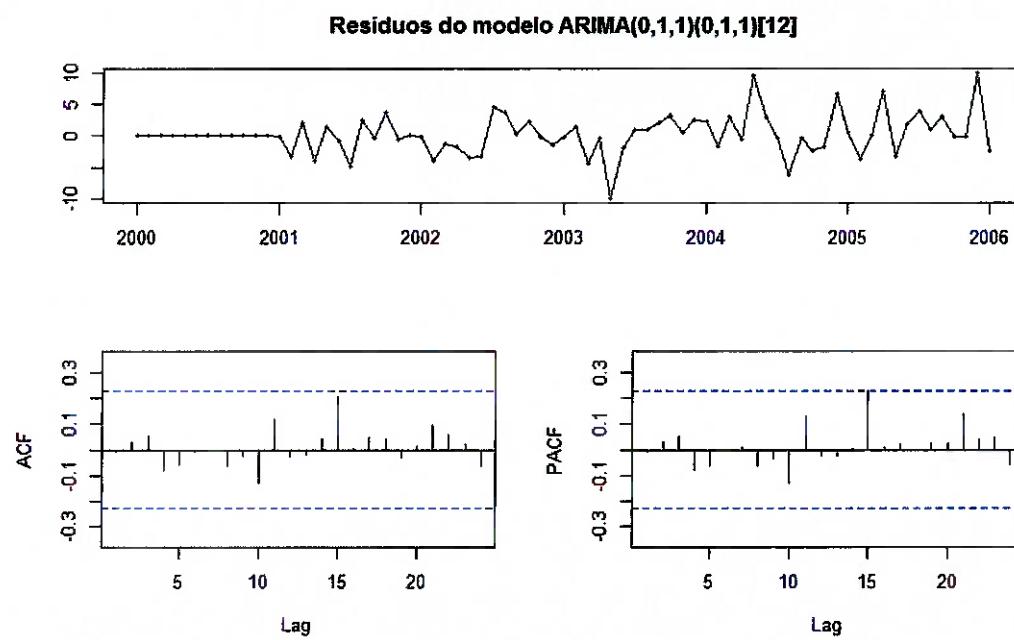


Figura 40 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Tecidos Vestuários e Calçados

Fonte: Elaboração Própria

4.4. Produção Física das Indústrias de Transformação

4.4.1. Modelagem pelo Método de Holt-Winters

Pode-se notar, na Figura 41, que modelo multiplicativo se aproxima da série original, no entanto, serão usadas as métricas de erros dos modelos para a comparação efetiva. Apresenta-se na Figura 42 o modelo aditivo.

Na comparação dos modelos nas Figuras 43 e 44 pode-se notar que o modelo aditivo teve erros mais descorrelacionados e sem lag em destaque. Já no modelo multiplicativo observa-se alguns *lags* do modelo ultrapassando a linha pontilhada, o que indica que não é o melhor modelo.

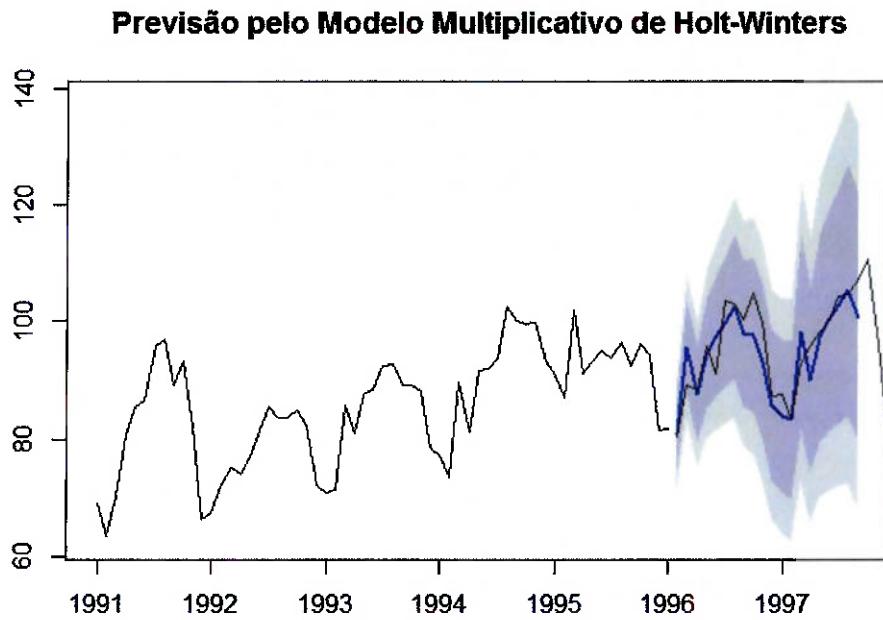


Figura 41 - Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Previsão pelo Modelo Aditivo de Holt-Winters

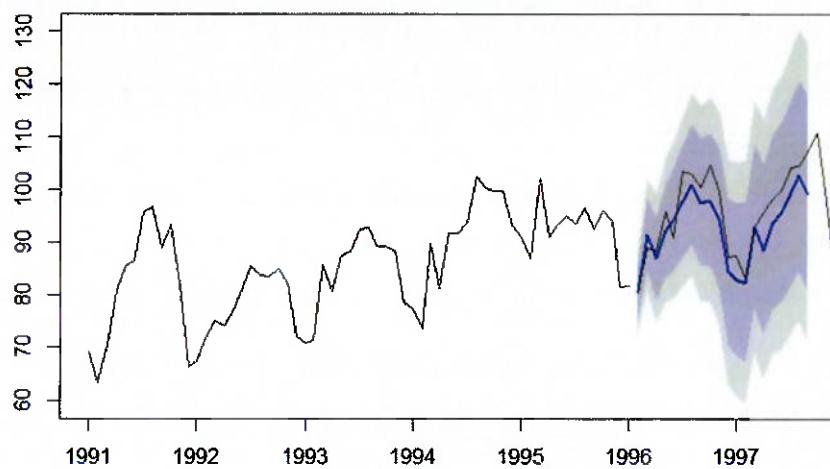


Figura 42 - Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Resíduos do Modelo Holt-Winters Multiplicativo

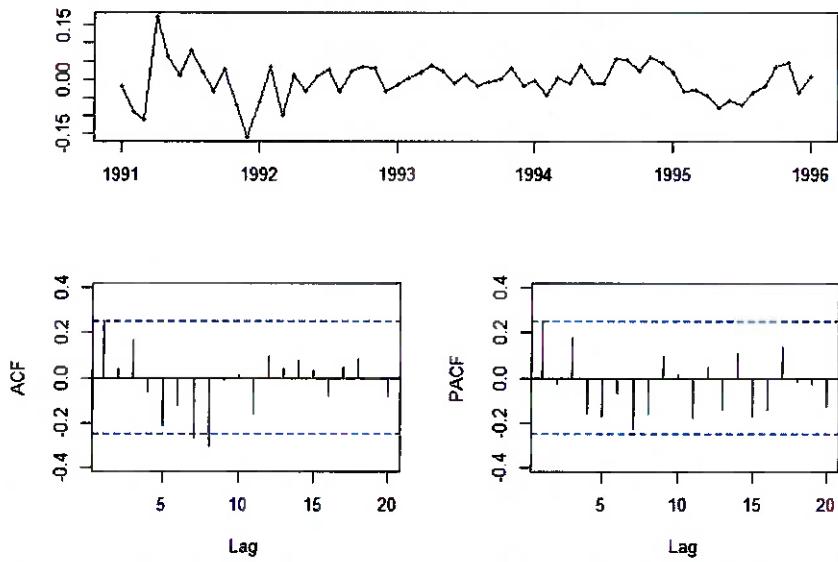


Figura 43 - Resíduos do Modelo Multiplicativo de *Holt-Winters* na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

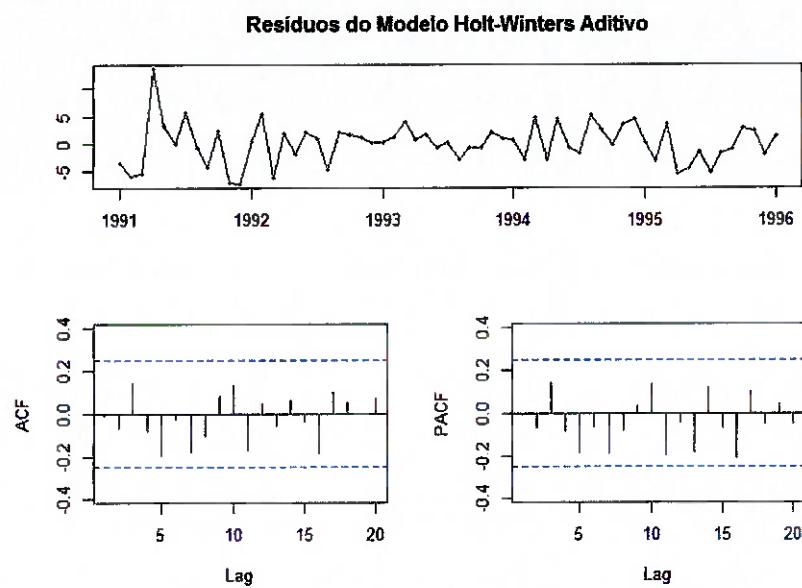


Figura 44 - Resíduos do Modelo Aditivo de *Holt-Winters* na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

4.4.2. Modelagem pelo Método SARIMA

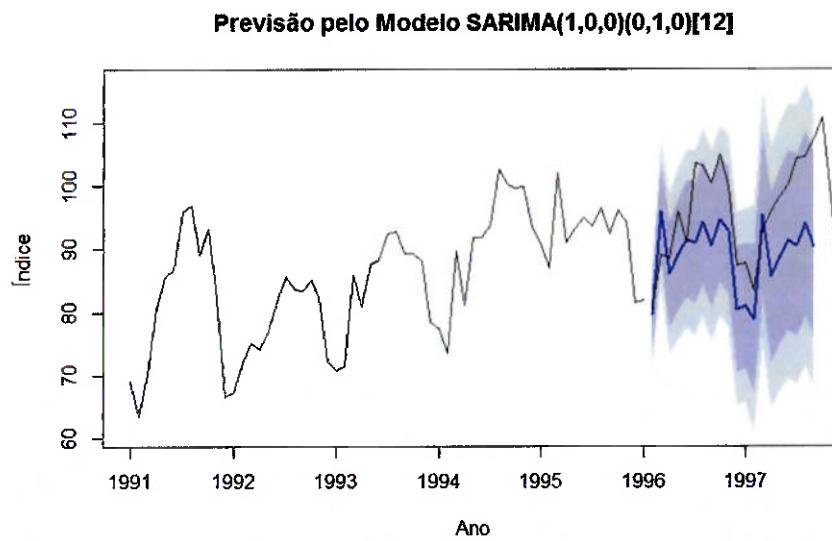


Figura 45 - Modelo SARIMA na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Próprio

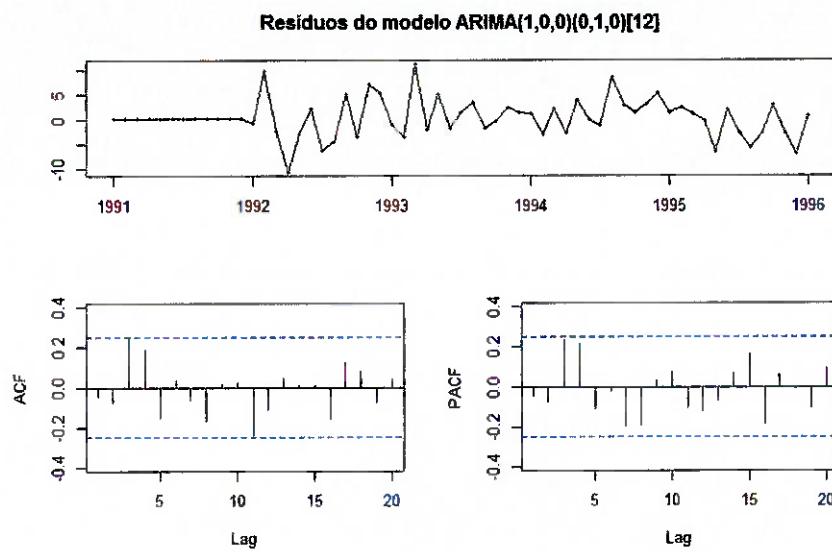


Figura 46 - Resíduos do Modelo SARIMA na série: Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Elaboração Própria

Pode-se notar pela Figura 45, da previsão pelo modelo SARIMA, que não tivemos o melhor resultado, pois a linha de previsão pouco se aproxima da linha dos dados da série original.

Na Figura 46, dos resíduos do modelo SARIMA, nota-se na ACF e PACF que o resíduo está descorrelacionado sem decrescimento lento ou exponencial o que significa que o modelo capturou toda a componente sazonal.

5. COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os valores das métricas de erro de modelagem um passo à frente e as métricas de erro de previsão vinte passos à frente obtidas em cada modelo para as quatro séries estudadas. Será feita a comparação e destacado qual o modelo obteve o menor erro quadrático médio, tanto na modelagem quanto na previsão e para os dois melhores modelos, serão apresentadas as fórmulas com os parâmetros usados na modelagem.

A seguir são apresentadas as tabelas 3 e 4 contendo as métricas extraídas dos modelos aplicados. A Tabela 3 contém as métricas dos três modelos aplicados nas quatro séries estudadas. A Tabela 4 contém as métricas de previsão dos três modelos aplicados nas quatro séries estudadas.

Tabela 3 – Consolidado das Métricas de Erro do Modelo um Passo à Frente

SARIMA	HW		Séries
	Aditivo	Multiplicativo	
1,99	3,10	2,79	Hipermercados Sup. Prod. Alimentos B. e Fumo.
9,96	7,85	7,15	Tecidos Vestuários e Calçados
10,37	8,04	7,00	Livros Jornais Revistas e Papelaria
15,48	13,70	17,96	Produção Física da Indústria de Transformação

Fonte: Autoria Própria

Tabela 4 - Consolidado das Métricas de Erro da Previsão Vinte Passos à Frente

SARIMA	HW		Séries
	Aditivo	Multiplicativo	
27,60	21,48	15,71	Hipermercados Sup. Prod. Alimentos B. e Fumo.
78,99	17,94	16,20	Produção Física da Indústria de Transformação
25,25	27,16	27,24	Tecidos Vestuários e Calçados
33,54	47,93	37,04	Livros Jornais Revistas e Papelaria

Fonte: Autoria Própria

Nota-se, na Tabela 3, que o modelo que teve o menor erro quadrático médio na modelagem com um passo à frente, na série Hipermercados Sup. Prod. Alimentos Bebidas e Fumo, foi o SARIMA com 1,99 seguido do *Holt-Winters* Multiplicativo com 2,79 que terão suas fórmulas e parâmetros especificados a seguir.

São apresentadas as fórmulas 27, 28, 29 e 30 do modelo de *Holt-Winters* Multiplicativo e os valores dos parâmetros usados na modelagem. Os parâmetros de suavização exponencial para o nível, tendência e sazonalidade são respectivamente Alpha, Beta e Gama para os quais foram obtidos os seguintes valores 0,259; 0,1384; 1e-40, respectivamente.

Parâmetros Iniciais:

$$\text{Nível} = 64,7418$$

$$\text{Tendência} = -0,2563$$

Sazonalidade = 1.2717; 0,9845; 1,0067; 0,9623; 0,9893; 0,9889; 0,9471; 0,9765; 0,9853; 1,0157; 0,9155; 0,957

As equações são as seguintes:

$$L_t = 0,259\left(\frac{z_t}{s_{t-m}}\right) + (1 - 0,259)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (27)$$

$$T_t = 0,1384(L_t - L_{t-1}) + (1 - 0,1384)T_{t-1} \quad 0 \leq \beta \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (28)$$

$$S_t = 1e-04\left(\frac{z_t}{L_{t-1} - T_{t-1}}\right) + (1 - 1e-04)S_{t-m} \quad 0 \leq \gamma \leq 1; t = m + 1, \dots, N \quad (29)$$

$$\hat{Z}_{t+h} = L_t + T_t h + S_{t+h-m}, \quad (30)$$

A seguir observa-se a fórmula e os parâmetros do modelo SARIMA.

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L)(1 - \Phi_1 L^{12} - \Phi_2 L^{24})(1 - L)(1 - L^{12}) y_t = (1 - \theta_1 L \theta_2 L^2) (1 - \Theta L^{12}) \varepsilon_t \quad (31)$$

onde,

L = Operador atraso

$$\phi_1 = -1,0056$$

$$\phi_2 = -0,7598$$

$$\Phi_1 = -0,0658$$

$$\Phi_2 = -0,4029$$

$$\theta_1 = 0,3557$$

$$\theta_2 = 0,4099$$

$$\Theta = -0,7435$$

Na Tabela 4, a série Hipermercados Sup. Prod. Alimentos Bebidas e Fumo teve o menor erro no modelo Holt-Winters Multiplicativo com 15,71 seguido do Holt-Winters Aditivo ficando em último lugar o modelo SARIMA que teve o melhor desempenho na análise de erro do modelo, o que significa que na previsão 20 passos à frente o melhor modelo é o *Holt-Winters* Multiplicativo, comprovando o que Barros afirma sobre a escolha dos modelos.

Em geral, o modelo multiplicativo é apropriado quando a variação do padrão sazonal ou ao redor da componente ciclo-tendência for proporcional à magnitude dos dados, enquanto o modelo aditivo é mais apropriado quando estas componentes não forem proporcionais à magnitude dos dados.
(BARROS, 2018, sessão 2.1)

A série Tecidos Vestuários e Calçados na Tabela 3 teve o menor erro no modelo *Holt-Winters* Multiplicativo com 7,15 seguido do *Holt-Winters* aditivo enquanto que na Tabela 4 o menor erro para essa série foi o modelo SARIMA com 25,25 seguido do *Holt-Winters* Multiplicativo com 27,24.

A série Livros Jornais Revistas e Papelaria teve o menor erro, na Tabela 3, também no modelo *Holt-Winters* Multiplicativo seguido do Aditivo e na Tabela 4 o

menor erro para esta série foi o SARIMA com 33,54 seguido do Holt-Winters Multiplicativo com 37,04.

A série Produção Física da Indústria de Transformação teve o melhor desempenho no modelo Holt-Winters Aditivo com 13,70 seguido do modelo SARIMA com 15,48 e na Tabela 4, o melhor modelo para essa série foi o Holt-Winters Multiplicativo com 16,20 seguido do Holt-Winters Aditivo com 17,94.

6. CONCLUSÃO

O modelo que teve o melhor desempenho nas séries foi o *Holt-Winters* Multiplicativo que aparece com melhores resultados de previsão por duas vezes na Tabela 3 e duas na Tabela 4, seguido do modelo SARIMA que aparece três vezes somando os resultados das duas tabelas e por último o modelo *Holt-Winters* Aditivo que aparece uma única vez.

7. BIBLIOGRAFIA

BARROS, et. al. **Análise de Séries Temporais em R: curso introdutório.** 1. Ed. Rio de Janeiro, 2018.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis: Forecasting and Control.** San Francisco: Holden-Day Inc., 1976.

BUENO, **Econometria de Séries Temporais,** 2 Ed. 2012

HELMUT LÜTKEPOHL. **New Introduction To Multiple Time Series Analysis,** 2006.

LEVINE, D. M.; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. **Estatística: teoria e aplicações usando microsoft® excel em português.** Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos Editora, 811 p. 629.

MORETTIN P.A. & TOLOI M C. **Análise de Séries temporais,** 2. Ed. São Paulo: Egard Blucher, 2006. 108 p.

PELLEGRINI, F.R.; FOGLIATTO, F. **Estudo comparativo entre modelos de Winters e de Box-Jenkins para a previsão de demanda sazonal.** Revista Produto & Produção. Vol. 4, número especial, p.72-85, 2000.

PELLEGRINI, F. R.; FOGLIATTO, F. S. **Passos para implantação de sistemas de previsão de demanda – Técnicas e estudo de caso.** Revista Produção. Vol. 11, n. 1, p. 43-64, 2001.